Ütközéses relaxáció, Fokker–Planck egyenlet

1.

ismétlés: ütközésmentes relaxáció

ütk. mentes Boltzmann egyenlet

$H = \frac{1}{2}v^2 + \phi(\vec{r})$

$\nabla^2\phi = 4\pi G m N \int d^3v\, f$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad \Rightarrow \text{ energia megmarad}$$

↳ ha ráülünk egy részecskére, a fázissűrűség a trajektória mentén megmarad

de durva-szemcsés fázissűrűség kiátlagolódik $S = -\int f \ln f\, d^6w = \max$

tömegfüggetlen ⇐ fázis keveredés

viharos relaxáció (időfüggő potenciál) $t_{relax} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$

ütközéses relaxáció

ha a potenciál és energia nem marad meg, akkor az ütk. mentes Boltzmann egyenlet nem érvényes

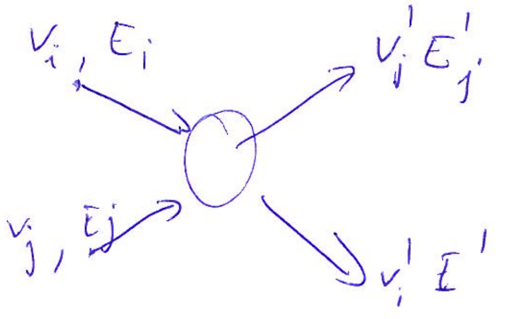
↓

mikor következik be?

ha t_{relax} kellően rövid

$$\ll \frac{0.1\,N}{\ln N}\, t_{cross}$$

↳ $\frac{R}{v}$ $\qquad v \sim \sqrt{\frac{GM}{R}} \sim \sigma$



energia csere $\quad v_i \longrightarrow v_i + \delta v_i$

tömegfüggő

1 kölcsönhatás után: $\langle \delta v_i \rangle = 0$

$$\langle \delta v_i^2 \rangle = 8\, \frac{G^2 m^2}{R^2 v^2} \ln \Lambda$$

sok kölcsönhatás után k db. $\quad k = \frac{t}{t_{cross}}$

$$\frac{\Delta v_i^2}{v_i^2} \approx k \frac{\langle \delta v_i^2 \rangle}{v_i^2} \approx \left(\frac{\langle \delta v_i^2 \rangle}{v_i^2} \right) \frac{t}{t_{cross}}$$

$$t_{relax} = t_{cross} \cdot \frac{v_i^2}{\langle \delta v_i^2 \rangle}$$

ütk. relaxáció:

Liouville tétele

6N dimenziós fázistér $f^{(N)}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_N)$

$\hookrightarrow$ 6 dim.

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\dot{\vec{q}}_\alpha \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{q}_\alpha} + \dot{\vec{p}}_\alpha \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_\alpha} \right) = 0$$

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \left[f^{(N)}, H_N \right] = 0$$

$$\frac{\partial f^{(N)}}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{V}_\alpha \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{x}_\alpha} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} \frac{\partial \phi_{\alpha\beta}}{\partial \vec{x}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{V}_\alpha} \right) = 0$$

$$\phi_{\alpha\beta} = -\frac{Gm}{|x_\alpha - x_\beta|}$$

Jeans-tétel

steady state $\Longleftrightarrow$ csak mozgás integrálokon keresztül függ a fáziskoordinátáktól a fázissűrűség

ütk. mentes Boltzmann egy.

$$f^{(N)}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_N) = f(H_N) = C \exp^{-\beta H_N}$$

$\hookrightarrow$ mozgásállandó

termikus egyensúlyban

Probléma: normalizációt nem lehet kielégíteni

$$\int f^{(N)} d\vec{w}_1 \ldots d\vec{w}_N = 1$$

<u>def:</u> redukált sűrűségfv.

$$f^{(k)}(\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k,t) \equiv \int d^6 w_{k+1} \dots d^6 w_N \; f^{(N)}(\vec{w}_1,\dots \vec{w}_N, t)$$

$$f^{(1)}(\vec{w}_1,t) = \int d^6\vec{w}_2 \dots d^6\vec{w}_N \; f^{(N)}(\vec{w}_1,\dots\vec{w}_N,t)$$

$$f^{(2)}(\vec{w}_1,\vec{w}_2,t) = f(\vec{w}_1,t)\,f(\vec{w}_2,t) + g(\vec{w}_1,\vec{w}_2,t)$$

pl.

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2} m \int d^6\vec{w}_1 \dots d^6\vec{w}_N \; f^{(N)}(w_1,\dots w_N,t) \sum_{\alpha=1}^{N} v_\alpha^2$$

$$= \frac{1}{2} N m \int d^6 w_1 \, f(w_1,t) \, v_1^2$$

pl.

$$\langle W\rangle = -\frac{1}{2}\int d^6 w_1 \dots d^6 w_N \; f^{(N)}(w_1 \dots w_N,t) \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \frac{G m^2}{|x_\alpha - x_\beta|}$$

$$= -\frac{1}{2} G m^2 N(N-1) \int d\vec{w}_1 \, d\vec{w}_2 \; \frac{f^{(2)}(w_1,w_2,t)}{|x_2-x_1|}$$

pl.

$\Longrightarrow$ Ha $f^{(2)}(w_1,w_2,t) = f(w_1)f(w_2)$ <u>lenne</u> és <u>$N \gg 1$</u> akkor

$$\langle W\rangle = -\frac{1}{2} m^2 N^2 \int d^6 w_1 \, d^6 w_2 \; \frac{f(w_1,t)\, f(w_2,t)}{|x_2-x_1|} =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x \; \rho(x)\,\phi(x)$$

Integráljuk ki a Liouville tételt $\int d^6\vec{w}_2 \dots d^6\vec{w}_N$ és tfh. $f^{(N)}(w_1,\dots w_N) = \prod_{\beta=1}^{N} f(w_\beta)$

Redukáljuk

$$\frac{\partial f(\vec{w}_1)}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial f(w_1)}{\partial x_1} + \sum_{\alpha=2}^{N} \int v_\alpha \frac{\partial f^{(N)}}{\partial x_\alpha} d^6 w_2 \dots d^6 w_N \; -$$

$\hookrightarrow dx_\alpha$ szerinti integrál miatt kiesik

$$- \frac{\partial f(w_1)}{\partial v_1} \sum_{\beta=2}^{N} \int \frac{\partial \phi_{1\beta}}{\partial x_1} f(w_2) f(w_3) \dots f(w_N) \, d^6 w_2 \dots d^6 w_N)$$

$$\frac{\partial f(w_1,t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f(w_1,t)}{\partial x_1} - (N-1)\frac{\partial f(w_1,t)}{\partial v_1}\int d^6 w_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_1} f(w_2,t) = 0$$

$$\bar{\Phi}(x_1,t) = N\int d^6 \vec{w}_2\; \Phi_{12}\, f(\vec{w}_2,t)$$

$$\frac{\partial f(w_1,t)}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial f(w_1,t)}{\partial X_1} - \underbrace{\frac{N-1}{N}}_{N\to\infty \;\to\; 1} \frac{\partial \bar{\Phi}(x_1,t)}{\partial \vec{x}_1}\frac{\partial f(w_1,t)}{\partial v_1} = 0$$

$\Longrightarrow$ ütk. mentes Boltzmann egyenlet

Általában a sűrűségfv. nem szeparálható

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{\Gamma(f)}_{\text{ütközési gyakoriság}} \equiv N\int d^6 w_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec{X}_1}\frac{\partial g(\vec{w}_1,\vec{w}_2,t)}{\partial \vec{v}_1}$$

korrelációs fv.
nem szeparálható része
$f^{(2)}(w_1,w_2) - f^{(1)}(w_1) f^{(1)}(w_2)$

BGGKY hierarchia

Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon

1-részecskés sűrűségfv. függ a kétrészecskéstől
2-részecskés függ a 3-részecskéstől

⋮

stb.

Egy adott rendnél 0-val tesszük egyenlővé

Fokker-Planck egyenlet

$\Psi(\vec{w}, \Delta\vec{w})\, d^6\Delta w\, \Delta t$ átmeneti valószínűség fv.

szemeljük ki egy $d^6\vec{w}$ darabot $\vec{w} \xrightarrow[\Delta t \text{ idő alatt}]{} \vec{w} + \Delta\vec{w}$

kiszóródás vsz. $\displaystyle \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_- = -f(\vec{w}) \int d^6\Delta w\, \Psi(w, \Delta w)$

beszóródás $\displaystyle \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_+ = \int d^6\Delta w\, \Psi(w-\Delta w, \Delta w)\, f(w-\Delta w)$

$$\frac{df}{dt} = \Gamma(f) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_+ + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_- = \int d^6\Delta w\, \Psi(w-\Delta w, \Delta w)\, f(w-\Delta w) - \Psi(w, \Delta w)\, f(w)$$

Taylor sor:

$$\Psi(w-\Delta w, \Delta w)\, f(w-\Delta w) = \Psi(w, \Delta w) f(w) - \sum_{i=1}^{6} \Delta w_i \frac{\partial}{\partial w_i}\left[\Psi(w, \Delta w) f(w)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{6} \Delta w_i \Delta w_j \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j}\left[\Psi(w, \Delta w) f(w)\right]$$

$$\frac{df}{dt} = \Gamma(f) = -\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial}{\partial w_i}\left\{D[\Delta w_i]\, f(\vec{w})\right\} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{6} \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j}\left\{D[\Delta w_i \Delta w_j]\, f(w)\right\}$$

$$D[\Delta w_i] = \int d^6(\Delta w)\, \Psi(\vec{w}, \Delta\vec{w})\, \Delta w_i$$

$$D[\Delta w_i \Delta w_j] = \int d^6\Delta w\, \Psi(\vec{w}, \Delta\vec{w})\, \Delta w_i \Delta w_j$$

diffúziós együtthatók

Brown-mozgás

diffúziós egyenlet $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial w_i}\left(C_{ij} \frac{\partial}{\partial w_j} f(\vec{w})\right)$

lokális kölcsönhatás
gravitációs folyamatokra

$\boxed{6}$

$\Delta x = 0$ (lokális kölcsönhatás)
$\Delta v \neq 0$

$$D[\Delta x_i] = 0 = D[\Delta x_i \Delta x_j]$$
$$0 = D[\Delta x_i \Delta v_j]$$

$$\Gamma(f) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial v_i}\left\{D[\Delta v_i]\, f(\vec{w})\right\} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}\left\{D[\Delta v_i \Delta v_j]\, f(\vec{w})\right\}$$

orbit átlagolás

hatás–szögváltozók esetén $\vec{w} = (\vec{\theta}, \vec{J})$

$$H(\vec{\theta}, \vec{J}, t) \approx H(\vec{J}, t)$$
$$f(\vec{\theta}, \vec{J}, t) \approx f(\vec{J}, t)$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} \approx 0$$
$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \approx \text{const.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\dot{J}_i}}_{0} \frac{\partial f}{\partial J_i} + \dot{\theta}_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = \Gamma(f)$$

$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\theta$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\theta \; \Gamma(f)$$
$$= \frac{\partial}{\partial J_i}\left\{ f\, \bar{D}[\Delta J_i] \right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j}\left\{ f\, \bar{D}[\Delta J_i \Delta J_j]\right\}$$

$$\bar{D}[\Delta J_i] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\theta \; D[\Delta J]$$