1

Mozgásállandó: $C[\vec{x}(t_1), \vec{v}(t_1); t_1] = C[x(t_2), v(t_2); t_2]$

$\forall t_1, t_2$-re

Mozgásintegrál

$$I[x(t_1), v(t_1)] = I[x(t_2), v(t_2)]$$

$\forall t_1, t_2$-re

Nem minden mozgásállandó mozgásintegrál

pl. körmozgás $\varphi = \Omega t + \varphi_0$

akkor $C \equiv \varphi_0 = \varphi - \Omega t$

mozgásállandó, de nem mozgásintegrál

pl. kezdeti feltétel: $\vec{x}_0, \vec{v}_0$ mozgásállandó

Hamiltoni $H(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{2} v^2 + \phi$ mozgásintegrál

tengelyszimmetria esetén $\phi = \phi(R, z, t)$ L_z mozgásintegrál

gömbszimmetria esetén $\phi = \phi(r, t)$ $\underbrace{\vec{L}}_{= \vec{x} \times \vec{v}}$ mozgásintegrál

Izoláló integrál

olyan mozgásintegrál ami ~~megszorítja~~ leszűkíti a rendelkezésre álló a fázisteret

pl. H, $\vec{L}_z$

precesszáló esetben $\Delta\phi$ ← (precessziós szögsebesség)

az egy orbitra jutó azimutális precesszió

$r = \frac{1}{1 + e\cos(\varphi + \Omega_p t)}$, $\varphi = \Omega t$

ha $\Delta\phi = \frac{N}{K} 2\pi$ akkor izoláló integrál, egyébként nem

Hatás-szög változók

sok esetben 3 izoláló integrál $I_i(\vec{x}, \vec{v})$ $i \in \{1, 2, 3\}$

Hamilton formalizmusban kanonikus transzformáció

$\boxed{P_i \equiv I_i}$

↳ $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$ $\{Q_i, Q_j\} = 0$ $\{P_i, P_j\} = 0$

def: $\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

pl. $J_1 = L_z$, $J_2 = L$, $J_3 = J_r = \frac{1}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{2E - 2\phi(r) - \frac{L^2}{r^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr\, p_r$

$$= \frac{GM}{\sqrt{-2E}} + \frac{1}{2}\left(L + \sqrt{L^2+4GMb}\right)$$

→ Kepler potenciálra $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$

Izokrón potenciálra $\phi(r) = -\frac{GM}{b+\sqrt{b^2+r^2}}$

Reguláris orbit ha ∃ (léteznek) hatás-szög változók

Orbit tórusz

legyenek $(\vec\Theta, \vec J)$ hatás-szög változók $\quad \vec J = (J_1, J_2, J_3)$ mozgásintegrálok

Ekkor $\dot J_i = -\frac{\partial H}{\partial \Theta_i} = 0 \Rightarrow H = H(J)$

$J_i = \text{const}$ → nem függ Θ-tól

$\Rightarrow \quad \dot\Theta_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \equiv \Omega_i(J) =$ állandó $\quad \Theta_i = \Theta_i(0) + \Omega_i t$

tehát ha sikerül a mozgásállandókból kanonikus változókat csinálni akkor kész vagyunk

Ha az orbit korlátos akkor x_i nem nőhet akármeddig úgy mint Θ_i

$\Rightarrow x_i$ a Θ_i-nek periodikus függvénye

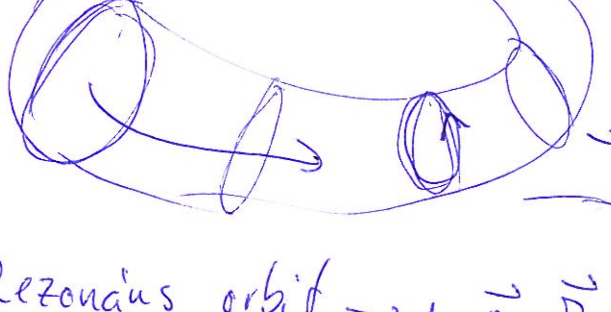
$$\vec x(\vec\Theta, \vec J) = \sum_{\vec n \in \mathbb{Z}^3} \vec X_n(\vec J)\, e^{i\vec n\cdot\vec\Theta}$$

→ egész számokból 3d vektor

$$= \sum_{\vec n} \vec X_n(J)\, e^{i\vec n\Theta_0}\, e^{i\vec n\vec\Omega t}$$

→ periodikus függvény

$\vec\Omega$ fundamentális frekvenciák



→ Rögzített $\vec J$ de változó $\vec\Theta$

Rezonáns orbit ∃$\vec n$ hogy $\vec n \cdot \vec\Omega = 0$

③

Poincare invariáns $\quad J_i = \frac{1}{2\pi} \iint dq_i\, dp_i = \frac{1}{2\pi} \iint d\theta_i\, dJ_i$

γ_i-vel határolt tartomány belseje

ahol γ_i az a görbe ahol csak θ_i változik

Idő átlag tétel

Ha egy reguláris orbit nem rezonáns, akkor az átlagos idő amit egy csillag fázispályája egy D régióban tartózkodik az orbit tóruszon, az arányos ~~az~~ térfogati integrállal $\quad V(D) = \int_D d^3\theta$

A hatásváltozók adiabatikus invariánsok ha a potenciál lassan változik.

§ Ha $\Omega_i = 0$ valamelyik i-re akkor J_i nem adiabatikus invariáns.

(akkor a potenciál végtelen lassú változása sem elég lassú)

Relaxáció I.

① ütközésmentes relaxáció

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

ütközésmentes Boltzmann egyenlet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0$$

$$\phi = \int \frac{\rho(x')}{|x-x'|} d^3x' = \iint \frac{f}{|x-x'|} d^3x' d^3v'$$

Ha Φ fix akkor is lehet "fáziskeveredés"

Liouville tétele: fázissűrűség megmarad a mozgás mentén

Fáziskeveredés után a sűrűség a kezdeti f_0 vagy 0 kell legyen ha megfelelően be-zoomolunk

Durva-szemcsés fázissűrűség:

felosztjuk a fázisteret egy fix griddel és megszámoljuk hány csillag van egy fáziscellában

$\Rightarrow$ durvaszemcsés fázis sűrűség $\bar{f}$ nem marad meg

$\Rightarrow$ "relaxáció"

Entrópia nő: $S = -\int \bar{f} \ln \bar{f} \, d\tau$ ↳ fázistérfogat

Jeans-tétel: $\forall$ steady-state megoldása az ütközésmentes Boltzmann egyenletnek csak mozgásintegrálokon keresztül függ a fáziskoordinátáktól

Jeans-tétel

$\forall$ steady-state megoldása az ütközésmentes Boltzmann egy.-nek csak mozgásintegrálokon keresztül függ a fázistkoordinátától

és

a mozgásintegrálok tetszőleges függvénye steady state megoldást ad az ütk. mentes Boltzmann egy.-nek

$$\frac{d}{dt} f\left[I_1(\vec{x},\vec{v}), I_2(\vec{x},\vec{v}), \ldots, I_n(\vec{x},\vec{v})\right] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial I_i}\frac{dI_i}{dt} = 0$$

időátlag tétel miatt ha majdnem minden orbit nemrezonáns reguláris akkor a steady-state megoldás a hatásoktól függ

a három ~~...~~ izoláló-integráltól függ

Tenzor viriáltétel

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}$$

$$I_{jk} = \int d^3x \, \rho \, x_j x_k$$

$$T_{jk} = \frac{1}{2}\int d^3x \, \rho \, \bar{v}_j \bar{v}_k$$

$$\Pi_{jk} = \int d^3x \, \rho \, \sigma_{jk}^2$$

$$W_{jk} = -\frac{1}{2} G \int d^3x \int d^3x' \, \rho(x)\rho(x') \frac{(x_j' - x_j)(x_k' - x_k)}{\|\vec{x}' - \vec{x}\|^3}$$

$$\sigma_{jk} = \int d^3v \int d^3v' \left(v_j - \bar{v}_j\right)\left(v_k - \bar{v}_k\right)$$

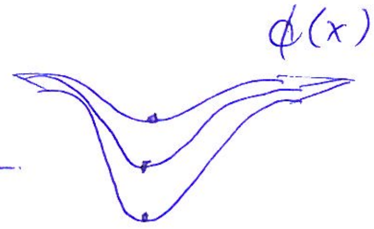
Relaxáció II.

violent relaxation — Lyndén-Bell (1967)
(viharos relaxáció)

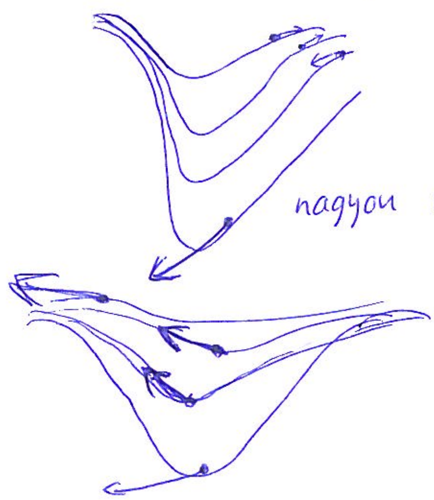
ha a potenciál $\Phi = \Phi(t)$ akkor $E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi$ nem konstans

$$\frac{dE}{dt} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{\vec{x}(t)}$$

pl. csillag egy protogalaxis közepén
ahogy nő a protogal. tömege
E csökken



pl. csillag lassan ~~ki~~felé mozog egy protogalaxisban



nagyon nagy sebességgel esik befelé

nagy sebességgel száguld kifelé

E megnőtt

a folyamat nem függ a részecske tömegétől!

fázis-sűrűség relaxálódik a tömegtől függetlenül

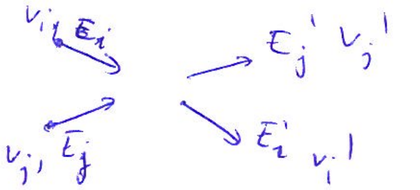
$$S = -\int f \ln f \, d^6\tau = \max.$$

a dinamikai időskálán $\frac{1}{\sqrt{G\rho}}$

Relaxáció III

ütközéses relaxáció

csillagok közeli elhaladásai energiát cserélnek ki



$$v_i \to v_i + \delta v_i$$

$\hookrightarrow$ pl. $\langle \delta v_i \rangle = 0$

$$\langle \delta v^2 \rangle \neq 0$$

$$= \cancel{8} \, 8 \frac{G^2 m^2}{R^2 v^2} \ln \Lambda$$

$$\Delta v^2 = N \langle \delta v^2 \rangle = 8 \frac{G^2 (\sqrt{N} m)^2}{R^2 v^2} \ln \Lambda$$

1 kölcs. után
$$\frac{\Delta v_1^2}{v^2} = \frac{8 \ln \Lambda}{N}$$

$$\Lambda = \frac{R}{b_{90°}} \approx \frac{R v^2}{G m} \approx N$$

$k = \frac{t}{t_{cross}}$ kölcs után

$$\frac{\Delta v_k^2}{v^2} = \frac{\Delta v_1^2 k}{v^2} = \frac{t}{\frac{v^2}{\Delta v_1^2} t_{cross}}$$

$$t_{relax} = \frac{v^2}{\Delta v_1^2} t_{cross} = \frac{N}{8 \ln \Lambda} t_{cross}$$

$$\approx \frac{0.1 N}{\ln N} t_{cross}$$

---

tenzor viriál-tétel érvényes $\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2 K_{jk} + W_{jk}$

$$I_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha x_{\alpha j} x_{\alpha k} \qquad K_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{x}_{\alpha j} \dot{x}_{\alpha k} \qquad W_{jk} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} m_\alpha m_\beta \frac{(x_{\alpha j} - x_{\beta j})(x_{\alpha k} - x_{\beta k})}{\| \vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta \|^3}$$

Ekvipartíció felé törekszik $\frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 = \text{áll}$

---

fázisteret egyenletesen tölti ki $S = -\int f \ln f = \max$

8

$N = \text{áll} = \int f\, d^6 r$

$S = -\int f \ln f = \max.$

$E = \text{áll} = \iint f m \phi(\vec{x})\, d^3x\, d^3v$

$\frac{1}{2}\iint f m v^2\, d^3x\, d^3v$

$\delta S - \beta \delta E - \alpha \delta N = 0$

$-\int \delta f \ln f - \int \delta f - \beta \int \delta f\, m\left(\frac{1}{2}v^2 - \phi\right) - \alpha \int \delta f = 0$

$\ln f + 1 + \alpha + \beta m\left(\frac{1}{2}v^2 + \phi\right) = 0$

$f = e^{-(1+\alpha)}\, e^{-\beta m\left(\frac{1}{2}v^2 + \phi\right)} = C\, e^{-\beta H}$

$\hookrightarrow \int f\, d^6 r = N$