Fekete lyuk akkréció

Kocsis Bence

I. BEVEZETŐ

Bár a fekete lyukak belsejéből semmi sem tud kiszabadulni, a fekete lyukak közvetlen környezetében levő gáz káprázatosan fényes sugárzást bocsájt ki, ami sok esetben fényesebb mint a fekete lyukat körülvevő galaxis összes csillaga együttvéve. A fekete lyukba bearámló gáz, ún. *fekete lyuk akkréció*, felelős a fényes sugárzás kibocsájtásáért és a fekete lyukak növekedéséért. Ebben a fejezetben levezetjük a fekete lyuk akkréció fényességét és a fekete lyukak növekedésének ütemét.

Bonyolult fizikai rendszerek első megértéséhez célszerű minimális modelleket tekinteni, amiben minden folyamatot elhanyagolunk ami nem abszolút fontos a jelenség kvalitatív értelmezéséhez. Bár a fekete lyuk belsejében és közvetlen közelében a newtoni fizika helyett az általános relativitáselméletet kell használni, a fekete lyuktól távol érvényesek a newtoni közelítések.[1,2] Ahol lehet igyekszünk newtoni fizikát használni a levezetések során, csak ahol elkerülhetetlen ott tárgyaljuk a relativisztikus effektusokat, amivel kibővítjük a newtoni modellt.

II. BONDI AKKRÉCIÓ

Tekintsünk egy M tömegű fekete lyukat, amit attól távol ρ_0 sűrűségű, p_0 nyomású, T_0 hőmérsékletű homogén gáz vesz körül. A fekete lyuk megváltoztatja a ρ, p, T mennyiségeket a tér és az idő függvényében, mígnem az áramlás elér egy közelítőleg stacionárius állapotot, hasonlóképpen egy fürdőkádhoz, amiben kihúztuk a dugót. Határozzuk meg a fekete lyuk milyen ütemben képes gázt beszippantani és milyen dM/dt ütemben növekedhet a tömege! Másodlagos célunk meghatározni a gáz jellemzőinek sugárfüggését a fekete lyuktól mért távolság függvényében.

Először vizsgáljuk azt az esetet amiben a fekete lyuk nem mozog a gázhoz viszonyítva, azaz a gázra a "végtelenben" teljesül az, hogy $\langle v_i \rangle = 0$, ahol i megadja hogy melyik gázrészecskéről beszélünk és az átlagolás az összes gázrészecskére megy. Az egyes gázrészecskéknek sebessége a termikus mozgás miatt nem nulla, a tipikus sebességüket jelöljük v_0-lal: $\langle v_i^2 \rangle = v_0^2$. Ezt meghatározhatjuk az ekvipartíció tételének segítsével. Nagyságrendileg teljesül, hogy

$$mv_0^2 = kT_0\,, \tag{1}$$

ahol m a gázrészecske tömege és k a Boltzmann állandó. Az így számított tipikus termikus sebesség megegyezik nagyságrendileg a c_s hangsebességgel:

$$v_0 = c_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{kT}{m}}\,. \tag{2}$$

Megjegyezzük továbbá, hogy az általános gáztörvény szerint, $p = nkT$, ahol n a számsűrűség. Protonokból és elektronokból álló gázra $n = \rho/m_p$, ahol m_p a proton tömeg, és n a protonok számsűrűsége.

A dM/dt akkréciós ráta nagyságrendi becsléséhez közelítsük a gázrészecskéket egymástól függetlennek, amik egymással nem hatnak kölcsön. A fekete lyuktól r távolságban a gázrészecske akkor tud eltávolodni a fekete lyuktól, ha a mechanikai energiája pozitív:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{r} > 0\,. \tag{3}$$

---

[1] Az általános relativitáselmélet alapegyenletének az Einstein-egyenletnek a közelítésére használatosak a posztnewtoni egyenletek, amit az Einstein egyenletek $v_i^2/c^2 \ll 1$ és $|\vec{r} - \vec{r}_i|/(GM_i/c^2) \ll 1$ paraméterek szerinti sorfejtésével kapunk, ahol $\vec{v}_i$ az i-edik forrás sebessége, $v_i = |\vec{v}_i|$, $\vec{r} - \vec{r}_i$ az i-edik forrástól mért távolság. A newtoni közelítés hibája nagyságrendileg ezeknek a paramétereknek a nagyságával egyezik meg. Az általánosan relativisztikus akkréciós modellek valóban a newtonihoz kvalitatíve hasonló eredményhez vezetnek a sűrűség, nyomás, hőmérséklet sugárfüggése tekintetében. Az akkréciós jelenség lényegi megértéséhez tehát a newtoni modell tökéletesen megfelel, a modern szakirodalom is gyakran a gyorsan átlátható newtoni modelleket alkalmazza.

[2] A newtoni és a posztnewtoni modellek közötti közbülső lehetőség a newtoni potenciál ad hoc módosítása, ami bizonyos relativisztikus effektusokat kvalitatíve visszaad. Ilyen a Paczynkski-Wiita potenciál $-GM/(r - r_g)$, ahol M a tömeg, $r_g = 2GM/c^2$. Látható, hogy $r \gg r_g$ esetén aszimptotikusan a newtonihoz tart. Tesztrészecskék ebben a potenciálban relativisztikus precesszióhoz hasonló módon precesszálnak.

Azt a sugarat ahol ez éppen nem teljesül Bondi-sugárnak nevezzük:

$$r_{\rm B} = \frac{2GM}{v_0^2}\,. \tag{4}$$

Azok a gázrészecskék amik a Bondi sugáron belül helyezkednek el végső soron be fognak esni a fekete lyukba. Bár a Bondi sugáron kívül a fekete lyuk hatása elhanyagolható, a termikus mozgás miatt, a gázrészecskék véletlenszerűen beléphetnek a Bondi sugáron belülre. A Bondi akkréció esetén gömbszimmetrikus közelítésben az anyag v_0 kezdeti sebességgel áramlik befelé sugárirányban, tehát kb. $t = r_{\rm B}/v_0$ idő alatt esik be a fekete lyukba.

Ha a tipkus sebességük v_0, a Bondi sugáron belülre beáramló tömeg nagyságrendileg

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r_{\rm B}^2 \rho_0 v_0\,, \tag{5}$$

ahol felhasználtuk, hogy $dM_{\rm B} = 4\pi r_{\rm B}^2\rho_0 dr$ egy vékony gömbhély tömege és nagyságrendileg $dr/dt = v_0$. Behelyettesítve a Bondi sugarat

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi\left(\frac{2GM}{v_0^2}\right)^2 \rho_0 v_0 = \frac{16\pi G^2\rho_0}{v_0^3}M^2 = \frac{16\pi G^2 \rho_0 m^{3/2}}{k^{3/2}T_0^{3/2}}M^2\,. \tag{6}$$

Ezt Bondi akkréciós rátának hívjuk. Amennyiben a fekete lyuk $v_{\rm BH}$ sebességgel mozog a gázhoz képest, az előbbi levezetésben $v_0^2 = c_{\rm s}^2 + v_{\rm BH}^2$ helyettesítést kell tennünk. Az eredmény a Bondi sugárra és az akkréciós rátára:

$$r_{\rm B} = \frac{2GM}{v_{\rm BH}^2 + c_{\rm s}^2}\,, \quad \frac{dM}{dt} = \frac{16\pi G^2\rho_0}{(v_{\rm BH}^2 + c_{\rm s}^2)^{3/2}}M^2\,. \tag{7}$$

Ezt Bondi-Hoyle-Lyttleton akkréciónak nevezzük. Ha $v_{\rm BH} \gtrsim c_s$ akkor a gáz beáramlás a fekete lyuk rendszerében szignifikánsan anizotróp. Mivel a Bondi sugár tipikusan sokkal nagyobb mint a horizont sugara, a beáramló gáz tipikusan elhalad a fekete lyuk mellett, a gázrészecskék pályája elgörbül, majd a pályák a fekete lyuk mögött keresztezik egymást a beáramlási iránnyal ellentétes oldalon. Itt kialakul egy lökéshullám, ami disszipációhoz vezet. Ennek következtében a gáz beesik a fekete lyukba. Tehát a fekete lyukba a gázbeáramlás iránya a Bondi sugáron belül kb ellentétesre változik az eredeti Bondi sugáron kívüli áramláshoz képest!

A sűrűség sugárfüggését a kontinuitási egyenletből vezethetjük le. Stacionárius esetben minden r sugarú gömbhéjon időegységenként áthaladó tömeg azonos dM/dt, hisz ellenkező esetben valamelyik gömbhéjban időben nőne vagy csökkenne az ott levő tömegmennyiség. Ha a sűrűség $\rho(r)$, az áthaladó tömegre teljesül, hogy

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2\rho(r)\frac{dr}{dt} \approx 4\pi r^2 \rho(r)\sqrt{\frac{GM}{r}} = \pi c r_g^2 \rho(r)\left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} \tag{8}$$

ahol $r_g = 2GM/c^2$ és felhasználtuk, hogy $(dr/dt)^2 \approx GM/r$ radiálisan befelé eső részecskékre ott ahol a beesési sebesség sokkal nagyobb mint a kezdeti sebesség, tipikusan nagyon szuperszónikus. Az egyenletből kifejezhető a sűrűség: $\rho(r) \propto r^{-3/2}$ szerint növekszik a fekete lyuk közelében.

Bondi akkréció és Bondi-Hoyle-Lyttleton akkréció esetén a gáz sugárzása és hővesztesége gyakorlatilag elhanyagolható. A gáz adiabatikusan nyomódik össze, ennek megfelelően számítható a nyomás és a hőmérséklet a sugár függvényében. A gáz sugárzása csak a legbelső régióban számottevő, ahol a nemnulla kezdeti impulzusmomentum miatt a részecskék körpályára kényszerülnek. A belső gázkorong sugárzását a következő szekcióban tárgyaljuk.

1. feladat Tekintsünk egy $M = 10{\rm M}_\odot$ tömegű fekete lyukat egy molekuláris felhőben, ahol a protonok számsűrűsége $n_0 = 1000 cm^{-3}$ és a gáz hőmérséklete $T_0 = 10^4\,$K. Hanyagoljuk el a fekete lyuk relatív sebességét $v_{\rm BH} = 0$.

(a) Számítsuk ki az $r_{\rm B}$ Bondi sugarat! Ellenőrizzük, hogy mennyivel nagyobb a fekete lyuk $r_g = 2GM/c^2$ horizontsugarától! Teljesül-e a kiinduló közelítésünk $r_{\rm B} \gg r_g$?

(b) Számítsuk ki a kezdeti dM/dt akkréciós rátát! Mekkorára nőhet egy fekete lyuk egy típikus molekuláris felhőben annak 10^6 yr élettartama alatt?

2. feladat Oldjuk meg a Bondi akkrécióra vonatkozó (6) differenciálegyenletet általánosan egy kezdetben M_0 tömegű fekete lyukra!

(a) Határozzuk meg az $M(t)$ időfüggést. (Segítség: vegyük észre hogy (6) szétválasztható elsőrendű differenciálegyenlet.)

(b) Az $M(t)$ behelyettesítésével határozzuk meg hogyan függ az r_B Bondi sugár az időtől.

(c) Diszkutáljuk az előző részfeladat eredményét! Mutassuk meg, hogy $M(t)$ véges idő alatt végtelen naggyá válik, tehát hogy létezik olyan $t = t_\mathrm{max}$, amire $M(t_\mathrm{max}) = \infty$. A Bondi akkréció $t \ll t_\mathrm{max}$ esetén alkalmazható, ha r_B kisebb mint a gázfelhő mérete. Mekkora numerikusan t_max az előző feladatban szereplő paraméterek esetén?

(d) Milyen közelítés okozta azt az abszurd eredményt, hogy $M(t_\mathrm{max}) = \infty$ egy véges t_max-re? (Segítség: gondoljuk végig mit feltételeztünk a Bondi sugártól a középpontig való beesés időtartamára?)

III. KORONG AKKRÉCIÓ

A. Keringés a fekete lyuk körül

Bondi akkréciónál elhanyagoltuk a gáz impulzusmomentumát a fekete lyuk körül. Hogy megértsük ez milyen esetben sérül, először tekintsünk egy tesztrészecskét, ami a fekete lyuk körül mozog $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ egységnyi tömegre jutó impulzusmomentummal. A sebesség kifejezhető egy radiális és egy tangenciális komponenssel $v_r = \dot{r}$, $v_t = r\dot{\phi}$, ahol (r, ϕ) polárkoordináták. Az egységnyi tömegre jutó impulzusmomentum és energia

$$L = r^2\dot{\phi}\,, \tag{9}$$

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2 - \frac{GM}{r}\,. \tag{10}$$

Behelyettesítve az impulzusmomentumot

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_\mathrm{eff}(r) \tag{11}$$

ahol

$$V_\mathrm{eff}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \tag{12}$$

Mivel E és L állandó, ez egy egyváltozós szétválasztható differenciálegyenlet az $r(t)$ függésre. A radiális mozgás olyan mintha a részecske egy $V_\mathrm{eff}(r)$ radiális effektív potenciálban mozogna 1 dimenzióban[3]. A mozgás egy maximális és minimális sugár között történik, amire $\dot{r} = 0$, vagyis $E = V_\mathrm{eff}(r)$. Az első tagot centrifugális gátnak nevezzük, megfelelően kis sugárnál ez kifelé taszítja a részecskét és radiálisan ellentart a gravitációs vonzásnak. A radiális effektív potenciálnak pontosan egy minimuma van, ami az adott impulzusmomentumhoz tartozó körpályás keringés sugara.

A Schwarzschild fekete lyuk körüli mozgást leíró egzakt általánosan relativisztikus mozgásegyenlet a newtonitól mindössze annyiban tér el, hogy a radiális effektív potenciál

$$V_\mathrm{eff}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GML^2}{c^2r^3}\,. \tag{13}$$

[3] Az energia, potenciál és impulzusmomentumot mindig leosztjuk a keringő tömegpont tömegével, így az egyenletek a test tömegétől függetlenek. Ez abban a közelítésben érvényes amikor $m \ll M$. Megjegyezzük továbbá, hogy mivel a tömeggel normalizálunk ezért V_eff sebességnégyzet dimenziójú.

Az $r(t)$ és $\phi(t)$ mozgás a (9) és (11) egyenletekből számítható[4]. Ha az impulzusmomentum és a kezdeti távolság megfelelően nagy, akkor az $1/c^2$-el arányos relativisztikus korrekció mindig elhanyagolható. Ilyenkor a mozgás nagyon hasonló a newtoni elliptikus mozgáshoz, amire $E = -GM/2a$, $L = [GMa(1-e^2)]^{1/2}$, $r(\phi) = a(1-e^2)/[1+e\cos(\phi+\phi_{\rm p})]$ ahol a és e a félnagytengely és excentricitás, $\phi_{\rm p}$ a pericentrumhoz tartozó azimutszög.

A relativisztikus korrekció $r \lesssim 10GM/c^2$ esetén számottevő. A relativisztikus (13) egyenletből látható, hogy megfelelően kis impulzusmomentum esetén a centrifugális gát nem tud ellentartani a gravitációnak és a részecske beeshet az $r = 0$ középpontba. A radiális effektív potenciálnak a relativisztikus esetben megfelelően nagy L esetén egy lokális minimuma és egy lokális maximuma van. Ennek megfelelően egy adott impulzusmomentumhoz tehát kétféle sugáron is megvalósulhat körpályás keringés. A lokális minimum kvalitatíve hasonló a newtoni esethez. Kis kitérítés esetén $r(t)$ a körpályás sugár körül oszcillál. A perihéliumprecesszió a relativisztikus korrekcióból fakad, a radiális oszcilláció periódusa ezen tag miatt nem azonos a ϕ szerinti keringés periódusával. A lokális maximum instabil: itt a körpályáról befelé kitérített test beesik a fekete lyukba. A stabil és instabil keringési sugarak egymástól egyre távolabb vannak L minél nagyobb. Megfelelően kis L esetén a stabil és instabil sugár egyesül $r = 6GM/c^2$-nél. Még kisebb L esetén $V_{\rm eff}(r)$ függvény monoton, ilyenkor körpálya nem megengedett. Ez definiálja a legbelső stabil keringési sugarat (innermost stable circular orbit)

$$r_{\rm ISCO} = 6\frac{GM}{c^2}\,. \tag{14}$$

Ezen eredmény Schwarzschild fekete lyukakra érvényes. Forgó, Kerr fekete lyukra, amennyiben a gázkorong azonos irányban egyenlítői síkban kering, $r_{\rm ISCO}$ annál kisebb minél nagyobb a Kerr forgási paraméter, extrém esetben $r_{\rm ISCO} = GM/c^2$. Ellentétes irányban keringő gázkorongnál Kerr fekete lyukakra $r_{\rm ISCO}$ nagyobb mint a Schwarzschild esetben, extrém esetben $r_{\rm ISCO} = 9GM/c^2$.

B. A korong geometriája

Ha a beáramló gáznak van egy $L \neq 0$ tömegegységre jutó impulzusmomentuma, akkor a tesztrészecske közelítésben kiszámíthatjuk mi az a minimális sugár amíg megközelítheti a gázfelhő a fekete lyukat. Nevezzük ezt *centrifugális sugárnak*, $r_{\rm cent}$. Ezen távolságban a gázrészecskék trajektóriái metszik egymást és így a gázban lökéshullámok alakulhatnak ki, ami disszipációhoz vezet. A gáz áramlása ezen sugáron körkörössé válik. A gáz a surlódás miatt felmelegszik, termikus sugárzást bocsájt ki és ezáltal energiát veszít.

Mivel a gáz energiát veszít, de impulzusmomentumot nem, ezért a gázfelhő egyre jobban kilaposodik, kialakul egy vékony korong. A korongban a részecskék minden r sugáron az annak megfelelő keringési sebességgel haladnak. Newtoni közelítésben a radiális mozgásegyenlet szerint

$$\omega^2 r = GM/r^2\,, \tag{15}$$

ahol $\omega = \dot\phi$ a keringési frekvencia. Mivel ω függ a sugártól, a korong nem merevtestként viselkedik hanem differenciálisan rotál. Ez a magyarázata az asztrofizikában megfigyelt korongstruktúrának planetáristól galaktikus skáláig.[5]

A különböző koncentrikus gyűrűk eltérő sebessége miatt a korongot alkotó koncentrikus gyűrűk között súrlódási erő ébred, ami forgatónyomatékot gyakorol. Ez az impulzusmomentum sűrűség lassú áramlásához vezet. A korong belső részei lassan befelé vándorolnak. A súrlódás által keletkező hőt a korong termikus sugárzással kisugározza és ennek hatására a gázrészecskék lassan befelé vándorolnak. Amikor a gázrészecskék elérik az $r_{\rm ISCO}$ legbelső stabil keringési sugarat (14), a pálya instabillá válik és a gázrészecskék beesnek a fekete lyukba további hősugárzás felszabadulása nélkül. A korongot alkotó gázrészecskék tehát $r_{\rm ISCO} < r < r_{\rm cent}$ sugáron keringenek. Az akkréciós korong egy ennek megfelelő középen lyukas korong.

---

[4] Megjegyezzük, hogy az impulzusmomentum egyenlet (9) relativisztikusan egzakt a tesztrészecske esetben itt nincs korrekció.

[5] Ugyanezen folyamat miatt keletkeznek korong alakú galaxisok, hisz a csillagokat formáló gázfelhő kilaposodik miközben hül. Továbbá ezért olyan sík a Naprendszer, a bolygókat formáló gázfelhő a termikus sugárzási energiaveszteség miatt laposodott ki.

C. A korong fényessége

A korong sugárzási teljesítményét a legegyszerűbb módon a következőképp becsülhetjük. Feltesszük, hogy a korong lokális termikus egyensúlyban van, vagyis a kisugárzott energia megegyezik a hőtermeléssel, ami végső soron a dm tömegű gázrészecskék befelé vándorlásából fakadó energiaváltozásának felel meg. A kisugárzott energia

$$dE_{\rm rad} = \frac{GMdm}{2r_{\rm ISCO}} - \frac{GMdm}{2r_{\rm cent}} \approx \frac{GMdm}{2r_{\rm ISCO}}\,. \tag{16}$$

Itt a második egyenletben felhasználtuk, hogy tipikusan $r_{\rm ISCO} \ll r_{\rm cent}$. A korong kisugárzott teljesítménye

$$\frac{dE_{\rm rad}}{dt} = \frac{GM}{2r_{\rm ISCO}}\frac{dm}{dt} = \frac{GM}{2c^2 r_{\rm ISCO}}\dot{m}c^2 = \frac{1}{12}\dot{m}c^2\,. \tag{17}$$

Itt $\dot{m} = dm/dt$ és behelyettesítettük $r_{\rm ISCO}$-t Schwarzschild esetben (14). Extrém Kerr fekete lyukra $1/12$ helyett $1/2$-et kapunk megegyező irányú keringés esetén. A kisugárzott energiának és a beáramló gáz nyugalmi tömegének arányát *sugárzási hatékonyságnak* nevezzük, ami a Schwarzschild és extrém Kerr esetben a fenti newtoni számolás szerint ez $1/12$ és $1/2$ között változik. A relativisztikus számolás pontos eredménye ettől kissé eltér:

$$\epsilon = \frac{\dot{E}_{\rm rad}}{\dot{m}c^2} = \begin{cases} 10\% & \text{Schwarzschild esetben}\,, \\ 42\% & \text{Kerr esetben},. \end{cases} \tag{18}$$

A fekete lyukak tehát rendkívül hatékony módon tudják sugárzássá alakítani a beeső tömeg nyugalmi energiáját! A fenti számolásból látható, hogy a sugárzás annál hatékonyabb minél közelebb tud kerülni a gáz a középponthoz. A forgó fekete lyukak azért sokkal fényesebbek fix $\dot{m}$ esetén, mert ott a legbelső stabil keringési sugár jóval bentebb van.

A fenti (16) egyenlethez hasonlóan megbecsülhetjük a korong fényességét a sugár függvényében. A korongot gondolatban bontsuk vékony koncentrikus dr vastagságú gyűrűkre. Az egységnyi felületen kisugárzott teljesítmény a Stefan-Boltzmann törvény szerint σT^4 ahol σ a Stefan-Boltzmann állandó. Mivel a korong mindkét irányban sugároz, így egy gyűrű effektív felülete $A = 2 \times (2\pi r) \times dr$. Továbbá az energiaváltozás $r + dr$ és r között

$$\frac{d^2E_{\rm rad}}{dt} = 4\pi r dr\sigma T^4 = \frac{GMdm}{2rdt} - \frac{GM\,dm}{2(r+dr)dt} \approx \frac{GMdmdr}{r^2dt}\,. \tag{19}$$

A sugárzási fluxus tehát

$$\sigma T^4 = \frac{GM}{8\pi r^3}\frac{dm}{dt}\,. \tag{20}$$

Mivel stacionárius áramlás esetén dm/dt időtől és a helytől független konstans, ezért a fluxusra teljesül, hogy $F_{\rm rad} = \sigma T^4 \propto r^{-3}$. A sugárzás legnagyobb része a belső régiókból ered. A hőmérséklet befelé $T \propto r^{-3/4}$-nek megfelelően növekszik. A korong spektruma a különböző hőmérsékletű gyűrűk feketetest sugárzásának szuperpozíciójából kapható. Nagyságrendileg egy-egy gyűrű által kibocsájtott sugárzás f karakterisztikus frekvenciája abból számolható, hogy a sugárzás egyensúlyban van a termikus energiával $hf = kT$, ahol h a Planck állandó, k a Boltzmann állandó. A spektrum maximális frekvenciája tehát

$$f_{\rm max} = \frac{kT_{\rm max}}{h} = \left(\frac{k^4 GM\dot{m}}{8\pi\sigma h^4 r_{\rm ISCO}^3}\right)^{1/4} = \left(\frac{k^4c^6\dot{m}}{8\pi 6^3\sigma h^4 G^2M^2}\right)^{1/4} \tag{21}$$

ahol behelyettesítettük $r_{\rm ISCO}$-t a Schwarzschild fekete lyuk esetén. Nagyobb frekveciára a korong spektrumának intenzitása levág. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy $\dot{m} \propto M$ (Eddington határ), ezért $f_{\rm max} \propto T_{\rm max} \propto M^{-1/4}$. A fekete lyuk akkréciós korong hőmérsékete és spektruma ezért kevéssé függ a fekete lyuk tömegétől. A szupermasszív fekete lyukak esetén ultraibolya, naptömegű fekete lyukak esetén a lágyröntgen tartományba esik.

Ettől magasabb frekvencián a korong nem bocsájt ki termikus sugárzást. Azonban a korongot körülvevő térben, ún. koronában, nagyenergiás elektronokon inverz-Compton szóródnak a fotonok és nagyobb energiára tesznek szert. A fekete lyukak koronája ezért röntgen tartományban sugároz. A fényes kvazároknál a korong összluminozitása sokkal nagyobb mint a korona összluminozitása.

D. Kitekintés

Az itt ismertett leegyszerűsített számolás nagyságrendileg jól visszaadja a pontosabb akkréciós modellek eredményét. A newtoni közelítésben ezt Shakura és Sunyaev [6], és Lynden-Bell és Pringle [3] dolgozták ki részletesebben 1973-1974-ben. Az ún. α-diszk modelljükben a kontinuitási egyenletet és a Navier-Stokes egyenletet oldották meg tengelyszimmetrikus közelítésben feltéve, hogy a súrlódás[6] arányos a nyomással, ahol az arányossági tényező α. Kiszámolták a súrlódás során keletkező hőt, ami a korong belséjéből a fotonok többszörös szóródása után tud csak kiszabadulni a korongra merőleges irányban, de a feltételezés szerint a termelődő hősugárzás ugyanazon sugáron hagyja el a kongot, így a sugárirányú hőadvekció elhanyagolható. A teljesen általánosan relativisztikus esetet Novikov és Thorne [5] számolta végig először vékony gázkorongra ami kvalitatíve hasonló eredményt adott. Érdekes módon a súrlódást meghatározó α paraméter egzaktul kiesik a korong kisugárzott fluxusának és a felszíni hőmérséklet helyfüggéséből és így a spektrum nem érzékeny az α feltételezésre, annak tényleges értékére. A korong időbeli változékonysága, a korong vastagsága, és a középsík hőmérséklete azonban függ α-tól.

Ha a korong gázrészecskéi nem körkörösen keringenek hanem számottevő befelé áramlás van, a gáz-impulzusmomentum kisebb és a sugárirányú hőtranszport már nem elhanyagolható. Az intuícióval ellentétes módon ez akkor alakul ki ha az akkréciós ráta alacsony.[7] Ha ugyanis magas, akkor a centrifugális gátnál a gáz körkörössé válik és optikailag vastag lesz, vagyis a keletkező fotonok sokszorosan szóródnak, és a protonokból, elektronokból, és fotonokból álló gázkorong eléri a termikus egyensúlyt és beáll a korábban tárgyalt α modellnek megfelelő szituáció. De alacsony akkréció rátánál (ha kisebb mint 2% Eddington, lásd alább), a korong-modell kvalitatíve megváltozik. Az ütközések ritkábbak és a protonok, elektronok, és fotonok hőmérséklete eltérő lehet, a korong geometriailag sokkal vastagabb, és a spektruma a keményebb röntgen felé tolódik, amint Narayan és Yi [4] megmutatták 1994-ben (advekció dominált akkréciós áramlás, ADAF). A súrlódásra Shakura és Sunyaevhez hasonlóan a fenomenológikus α-modellt használták.

A korongok súrlódásának α-modelljét egyszerű statisztikus mechanikai gázmodellel nem lehet megmagyarázni, hisz az utóbbiból számítható viszkozitás több mint 10 nagyságrenddel kisebb az α-modellhez szükséges értéktől. Az α-modellben ui. az akkréciós rátát az α viszkozitás-paraméter rögzíti, de az akkréciós ráta a korong fényességét határozza meg, ami csak nagy α esetén ($\alpha \sim 0.1$) egyezik meg a megfigyelésekkel. Turbulens áramlás sokkal hatékonyabban tud impulzusmomentumot-transzportálni, ez megmagyarázhatja a megfigyelt nagy súrlódási értéket. Balbus és Hawley [1] megmutatták, hogy egy mágnesezett plazmában fellép egy ún. magnetorotációs instabilitás, ami turbulenciához és impulzusmomentum transzporthoz vezet. A tudományos közösség ezt a lehetőséget tartja legígéretesebbnek, numerikus szimulációk segítségével sokan vizsgálják ezt a lehetőséget. Mindazonáltal az akkréciós korongok viszkozitásának eredete napjainkig sincs megoldva. A tudományterület jelenlegi állását a [2] összefoglalócikkben ismertettük bővebben.

IV. EDDINGTON HATÁR

A korábbiakban megismertük az akkréció két lehetséges formáját. A gömbi Bondi-akkréció esetén a gáz sugárzása elhanyagolható, ilyenkor a sugárzási hatékonyság ϵ szinte nulla. A korong akkréciónál ϵ értéke a fekete lyuk forgásának függvényében (18) egyenletnek megfelelően 10%–42% között változhat. Ha a korong sugárzási fluxusa átlép egy kritikus határt, az ún. Eddington-határt, akkor a sugárzás nyomása teljes mértékben megállíthatja és visszafordíthatja az akkréciót. Ilyenkor a sugárzás Compton-szóródása révén anyag kiáramláshoz jutunk, így az anyag végül nem éri el a fekete lyukat. A maximális fényesség és akkréció esetén a sugárzás nyomása éppen ellentart a gravitációnak. Számoljuk ki ezt a maximális fényességet!

Legyen az anyag sűrűsége ρ, opacitása κ. Az opacitás az anyagnak a sugárzással való kölcsönhatás képességét méri, definíció szerint az egységnyi sűrűségre és távolságra jutó intenzitáscsökkenést írja le

$$\frac{dI}{dr} = -\kappa\rho I\,. \tag{22}$$

[6] a “súrlódás” alatt viszkozitást értünk

[7] Akkor is érvényét veszti az α modell ha az akkréciós ráta extrém magas és az áramlás kis impulzusmomentumú, tehát valamennyire sugárirányú. Ilyenkor a gázkorongban a hősugárzást reprezentáló fotonok olyan sokszor szóródnak a gázrészecskéken, hogy nem tudnak kiszabadulni mielőtt a gázparcella szignifikánsan bentebb vándorol. A fotonok csapdázódnak a gázban és így a radiális hőadvekció nem elhanyagolható.

Ionizált plazmán Compton szóródásra $\kappa = \sigma_{\mathrm{T}}/m_{\mathrm{p}}$ ahol σ_{T} a Thompson szóródási hatáskeresztmetszet és m_{p} a proton tömege. Ha az intenzitás vagy energiafluxus κ mértékben lecsökken, akkor a sugárzás ennek megfelelő energiát és impulzust ad át a gáznak. A sugárzás P_{rad} impulzusa és energiája közti speciális relativisztikus összefüggés $P_{\mathrm{rad}} = E_{\mathrm{rad}}/c$. Az egységnyi dr úton átadott impulzus annak megfelelő nyomásgradienshez vezet

$$\nabla p = -\frac{\kappa\rho}{c} F_{\mathrm{rad}}\,, \tag{23}$$

ahol $F_{\mathrm{rad}} = d^2 E_{\mathrm{rad}}/dAdt$ az energiafluxus.

Az Eddington határ meghatározásához feltesszük, hogy a sugárnyomás épp ellentart a Φ gravitációs potenciál által keltett erőnek:

$$-\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi = 0\,. \tag{24}$$

Tehát a sugárzási fluxus így írható:

$$F_{\mathrm{rad}} = -\frac{c}{\kappa\rho}\nabla p = \frac{c}{\kappa}\nabla\Phi \tag{25}$$

A kisugárzott teljesítmény (luminozitás) a fluxus felületi integrálja a forrást körülvevő felszínre. Integráljuk tehát mindkét oldalt egy tetszőleges zárt térfogat határára és alkalmazzuk a Gauss tételt

$$L_{\mathrm{Edd}} = \int F_{\mathrm{rad}} \cdot dS = \int \frac{c}{\kappa}\nabla\Phi \cdot dS = \frac{c}{\kappa}\int \nabla^2\Phi dV\,. \tag{26}$$

Általában a gravitációs potenciál eleget tesz a Poisson egyenletnek $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, így

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi Gc}{\kappa}\int \rho dV = \frac{4\pi Gc}{\kappa} M = \frac{4\pi Gcm_{\mathrm{p}}}{\sigma_T} M = 3.2\times 10^4 \mathrm{L}_\odot \frac{M}{\mathrm{M}_\odot}\,. \tag{27}$$

Itt felhasználtuk a tömeg definícióját, majd behelyettesítettük az opacitást Compton szóródás esetén.

A megfigyelések szerint a fekete lyukak luminozitása tipikusan 0.01 és 1 L_{Edd} közötti, tehát a fekete lyuk akkréció nagyon hatékony módon termel sugárzási energiát. Látható, hogy egy Nap tömegű fekete lyuk 100–10^4 közti faktorral nagyobb teljesítményt képes kisugározni mint a Nap. Mivel a szupermasszív fekete lyukak tömege 10^6–$10^{10}\mathrm{M}_\odot$ között változik, ezért a gáz beáramlás esetén kigyulladó kvazár luminozitása kb 10^8–$10^{14}\,\mathrm{L}_\odot$ luminozitásának felel meg. Mivel egy Tejút típusú galaxisban kb. 10^{11} csillag található, látható hogy a kvazár fénye túlragyoghatja az azt körülvevő galaxist.

A fekete lyukak Eddinton-limitált növekedésének meghatározásához használjuk fel, hogy definíció szerint $L = \epsilon\dot{m}c^2$ ahol ϵ korongakkréció esetén a (18) egyenlet definiálja. Ha a beáramló gáz nyugalmi tömegének[8] ϵ része kisugárzódik, a maradék $1-\epsilon$ része beesik a fekete lyukba, tehát $\dot{M} = (1-\epsilon)\dot{m}$. Behelyettesítve

$$L = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\dot{M}c^2\,. \tag{28}$$

Átrendezés után

$$\frac{dM}{dt} = \frac{(1-\epsilon)L_{\mathrm{Edd}}}{\epsilon c^2} = \frac{4\pi Gm_{\mathrm{p}}}{c\sigma_T}\frac{1-\epsilon}{\epsilon}M \tag{29}$$

A Bondi akkrécióval szemben itt a tömeg növekedési ráta a tömeggel egyenesen arányos, ami exponenciális növekedéshez vezet, aminek időskálája, az ún. Eddington idő

$$t_{\mathrm{Edd}} = \frac{c\sigma_T}{4\pi Gm_{\mathrm{p}}}\frac{\epsilon}{1-\epsilon} = 5\times 10^8 \mathrm{yr}\,. \tag{30}$$

Az utolsó lépésben behelyettesítettük a Schwarzschild esetben érvényes (18) egyenletet. Az Eddington idő tömegtől független, azt fejezi ki, hogy mennyi idő alatt e-szereződik meg az akkretáló objektum tömege.

3. feladat

[8] $E = mc^2$

(a) A Tejút közepén a Földtől 8kpc távolságra található egy $4 \times 10^6 \mathrm{M}_\odot$ tömegű szupermasszív fekete lyuk, az SgrA*. Jelenleg az akkréciós ráta nagyon alacsony, ezért jelenleg nem figyelhető meg a kvazárokra vagy az aktív galaxismagokra jellemző fényes Eddington limitált sugárzás. A galaxismagban és annak környezetében azonban számos gázfelhő kering, ezért nem kizárt, hogy az egyik pályája egyszercsak metszi az SgrA*-ot. Mit látnánk ha az egyik gázfelhő beesne az SgrA*-ba? Nagyságrendileg milyen fényes lenne a Földről megfigyelt sugárzás a Vénuszhoz képest? Felhasználható adat: a Vénusz távolsága 10^{-6} pc, a Nap luminozitásának 10^{-9}-ed részét veri vissza, nagyságrendi becsléshez tekintsük az albedót 1-nek (100%-os visszaverődés). A beérkező fluxus egy r távolságban levő L luminozitású forrásból $F_{\rm rad} = L/(4\pi r^2)$.

4. feladat

(a) Oldjuk meg az (29) differenciálegyenletet és határozzuk meg $M(t)$ értékét ha $t = 0$-ban a kezdeti tömeg M_0.

(b) A legtávolabbról megfigyelt szupermasszív fekete lyuk a Földtől 13 milliárd fényév távolságra található. Mivel az Univerzum kora kb. 13.7 milliárd év, ezen fekete lyukat a Nagy Bumm után $t_0 = 0.7$ milliárd évvel látjuk. A tömege a megfigyelések szerint $M(t_0) = 8 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot$. Mennyi kellett, hogy legyen a kezdeti M_0 tömeg hogy $t_0 = 0.7$ milliárd éven belül elérje a megfigyelt értéket ha Eddington limitált akkrécióval növekedett.

---

[1] Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, Astrophys. Jour., 376, 214
[2] Kocsis, B., & Loeb, A. 2014, Space Sci. Rev., 183, 163
[3] Lynden-Bell, D., & Pringle, J. E. 1974, Mon. Not. Roy. Acad. Sci, 168, 603
[4] Narayan, R., & Yi, I. 1994, Astrophys. Jour. Lett., 428, L13
[5] Novikov, I. D., & Thorne, K. S. 1973, in Black Holes (Les Astres Occlus), 343
[6] Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, Astron. Astrophys., 500, 33