

# Elméleti mechanika beadandó feladatok

## 1. feladatsor

2005. június 17.

1. Vizsgáljuk a  $V(x) = -V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$  potenciállal megadott rendszert  $E = V_0$  esetén. Adjuk meg az  $x(t)$  függést és a  $v(x)$  trajektóriát!

2. Egy  $L$  hosszúságú elhanyagolható tömegű merev inga végére egy  $M$  tömegű testet rögzítünk, illetve azt egy  $D$  direkciós állandójú ideális rugóval a rúd függőleges helyzetében függőlegesen a padlóhoz kapcsoljuk. A rugó a függőleges helyzetben nyújtatlan,  $l_0$  hosszú. Mekkora a kis szögű rezgés periódusideje? Adjuk meg a  $T(E)$  függést az első nemeltűnő rendig tetszőleges  $M$ ,  $L$ ,  $l_0$  és  $D$  esetén!

3. Egy  $m$  tömegű  $E$  energiájú részecske egydimenziós mozgást végez egy potenciálvölgyben. A potenciálvölgy minimumától jobbra a  $V$  potenciálfüggvény  $V'$  deriváltja pozitív. A minimumhelytől balra  $V$ -nek az  $x = a$  helyen maximuma vagy inflexiós pontja van. Milyen törvény szerint tart a mozgás periódusideje  $\infty$ -hez, ha  $E \rightarrow V(a)$ ; feltéve, hogy

$$V^{(k)}(a) = 0, \quad k \leq n \quad V^{(n+1)}(a) < 0. \quad (1)$$

( $V^{(k)}$  a  $V$   $k$ -adik deriváltját jelöli.) Ha csak annyit tudunk  $V$ -ről, hogy  $a$ -ban nem tűnik el az összes deriváltja, milyen hatványfüggvénnyel becsülhetjük felülről a periódusidő divergenciáját?

4. Vizsgáljuk a  $V(r) = -\frac{k}{r} \exp(-\alpha r)$  centrális potenciáltérben való mozgást! Milyen pályák alakulhatnak ki? Mely körpályák lesznek stabilak?

5. A síkon egy  $m$  tömegű testre egy  $\mathbf{f}$  radiális erőmező hat,  $\mathbf{f}(r, \varphi) = f(r, \varphi) \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Mutassuk meg, hogy ha egy  $m$  tömegű,  $J$  impulzusmomentumú részecske az  $r(\varphi)$  pályagörbét futja be, akkor

$$f(r, \varphi) = \frac{J^2}{mr^4} \left[ \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \right]. \quad (2)$$

Ennek ismeretében reprodukáljuk a potenciálra kapott eredményünket, amit a centrumon átmenő,  $R$  sugarú körön mozgó  $m$  tömegű,  $J$  impulzusmomentumú részecske esetén kaptunk!

Legyen

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\beta\varphi)}. \quad (3)$$

Adjuk meg  $f(r, \varphi)$ -t! Milyen kapcsolat van  $p, \varepsilon, \beta$  és a  $J$  impulzusmomentum között, ha  $f$  nem függ  $J$ -től? Milyen ez a kapcsolat, ha még azt is megköveteljük, hogy az erőter centrális legyen, azaz  $f(r, \varphi) = f(r)$ ?

Béri Benjámín, Eisler Viktor, Kocsis Bence