Kocsis Bence
2001, TDK dolgozat
ELTE, fizikus szak, III. évf.

A maximális idõutazás üres térben

Kocsis Bence

Absztrakt

Az ikerparadoxon alapján tudjuk, hogy adott téridőpontok között különböző világvonalak mentén különböző sajátidő alatt juthatunk el. Üres térben maximális sajátidő az egyenes téridőgörbe mentén, minimális a fényszerű görbékre adódik. Egy inerciarendszerben az egyhelyben álló megfigyelő öregedik legtöbbet, a fényszerű megfigyelőnek nem telik idő.

Az emberi szervezet tűrőképességét szem előtt tartva korlátozzuk a lehetséges pályák maximális gyorsulását. A maximális sajátidejű pálya ezzel nem változik. A dolgozat célja a 3 dimenziós fizikai térbeli minimális sajátidejű zárt görbe felkutatása, amely mentén körbeutazva az álló megfigyelőhöz képest a legtöbbet lehet fiatalodni

Ilyen kényszerek esetén a variációs feladat Euler-Lagrange megfogalmazása szinguláris differenciálegyenletrendszer peremérték-problémájához vezet. Az extremális pályák általános analitikus megoldása reménytelen. A problémákat azonban elkerülhetjük, ha globális módszerrel csak az általános szimmetriákra hagyatkozunk. Ily módon bebizonyítható, hogy a maximális időutazás a térbeli egyenesvonalú pálya esetén jön létre. Az utazás energiájának korlátozásával szintén egyenest kapunk. A feladat általánosítható görbült téridőkre. Speciálisan a sztatikus gömbszimmetrikus esetet vizsgáltam.

1.1. A legalapvetõbb feladat?

A problémafelvetésben az egyszerûségre törekedtem, a természet által kijelölt legalapvetõbb kérdéseket igyekeztem megfogalmazni. Szorítkozzunk az anyag nélküli üres téridõ, a Minkowski téridõ vizsgálatára. Az idõszerû téridõgörbék a 4 dimenziós téridõ alapvetõ objektumai. A közös határpontú görbék a legkézenfekvõbb módon a 4 dimenziós ívhosszuk, a sajátidejük alapján hasonlíthatók össze. Ezek alapján a legegyszerûbb kérdés a lehetséges minimális és maximális görbe meghatározása. A megoldás ismert, a maximum az egyenesvonalú, a minimum (pontosabban infimum) a fényszerû téridõgörbékre adódik. (A végpont a kezdõpont idõszerû jövõjében van, ezért az egyenesvonalú mozgás inerciális, a fényszerû gyorsulást tartalmaz.) Az összes lehetséges téridõgörbék ezen két típusa a világ alapvetõen megkülönböztett fajtái.

Hogyan lehet értelmes módon bonyolítani a problémát, hogy nemtriviális problémához jussunk? Ha ez a "bonyolítás" nem túl mesterkélt, akkor továbbra is állíthatjuk, hogy a megoldás az üres téridõre jellemzõ, a természet által megkülönböztetett objektum lesz. Továbbra is a maximális és a minimális ívhosszúságú görbét keressük, a változtatást *kényszerek* bevezetésével tesszük meg. Az $x(\tau)$ világvonal legkisebb deriváltjai maximális Minkowski-hosszának korlátozása látszik legegyszerûbbnek. A nulladik illetve az elsõ deriváltra vonatkozó megszorítások -- a fázistér korlátozása -- az elõzõhöz képest nem vezet jelentõs eltérésre, csupán a kirótt kényszer érzékelhetõ a megoldáson: a maximális görbék ismét az egyenesvonalúak, a minimálisak a megengedett tértartományban futó, maximális impulzushoz tartozó görbék. Korlátozzuk ezért a *gyorsulásnégyzet maximumát*, és adjuk meg a *kezdeti és végsõ sebességet*. Az ezzel egyidejû maximális sebességnégyzet korlátozására a *korlátozott energiájú idõutazások* pontban térünk vissza.

A feladat alapvetõségét mutatja, hogy egyszerû differenciálgeometriai matematikaproblémaként fogalmazható meg. A téridõgörbe maximális görbületét korlátozzuk, és a kezdõ és végpontokon kívül az ottani érintõvektorokat is rögzítjük. Keressük az ezeknek eleget tevõ téridõgörbék közül a maximális és minimális ívhosszúságút. A megoldás tehát a Minkowski geometriára jellemzõ tulajdonság.

A probléma az idõutazásra vonatkozó fizika-megfogalmazásban lesz szemléletes. Az inerciarendszerben nyugvó megfigyelõ számára teljen el t idõ, miközben a korlátozott sajátgyorsulású megfigyelõ maximális T sajátidejû körutazást tesz. (Ezen a kört nem a geometriai értelemben értjük, csupán a térben zárt görbe mentén történõ utazásokra.) Az intuitív sejtés a közismert idõdilatáció formula alapján fogalmazható meg. A mozgó megfigyelõ órája a fénysebességet megközelíve, (exponenciális ütemben!) egyre lassabban jár. A maximális idõutazás érdekében érdemes minél tovább minél gyorsabban mozogni. Az egyenesvonalú mozgás "hibája" az, hogy a t koordinátaidõ utáni visszatérés csak úgy lehetséges, ha legkésõbb t/4 idejû gyorsulás után lassulni kezd. Ezzel "elpazaroljuk" a sebességet. A görbevonalú visszafordulás viszont sokáig tart: nagy sebességnél a visszafordulás csak nagyon nagy görbületi sugárral lehetséges, egyébként a centripetális gyorsulás meghaladja a gyorsuláskorlátot.

A feladatot elõször a variációszámítás szokásos nyelvén, az Euler Lagrange egyenletek felírásával fogjuk vizsgálni. Leegyszerûsítve az egyenleteket lehetõség nyílik a numerikusan szimulálációra. Ezzel azonban nem jutunk el a megoldáshoz, mert ahhoz meg kellene találni azokat a kezdeti értékeket, amelyekbõl az egyenletrendszert továbbfejlesztve teljesülnek a visszatérésre vonatkozó peremfeltételek. Késõbb láthatjuk is, hogy ez kétszer mindenütt differenciálható $x(\tau)$ függényre nem is teljesülhet, az extrémális megoldás két belsõ pontjában a sebesség-τ függvénynek törése van. Ez azonban elõáll mindenütt kétszer deriválható függvények határértékeként, ami az Euler-Lagrange módszerrel mégis leellenõrizhetõ. Ezen megfogalmazás tehát a hipotézis felállítására alkalmas. A megsejtett megoldást a dolgozat második felében globális módszerrel bizonyítom. Utána kitérek a másik "alapvetõ kérdés" tárgyalására. Itt a gyorsuláskényszer mellett az utazás teljes sebességváltozását is korlátozzuk. A dolgozat végén felvetjük a gravitációs általánosítás módját és megfogalmazzuk a gömbszimmetrikus statikus tér maximális idõutazására vonatkozó sejtést.

2.1. Az Euler-Lagrange megfogalmazás

Vizsgáljuk a feladatot a maximális sajátidejû megfigyelõ, az inerciális mozgást végzõ megfigyelõ szemszögébõl. A feladat azon minimális sajátidejû utazás felkutatása amelyre a $t = 0$ kezdõ- és a $t = t_{max}$ végpontokban $x^{\alpha} = 0$ és $u^{\alpha} = 0$ α=1,2,3 esetén teljesül. Az egységrendszert úgy választjuk, hogy a fénysebesség és a gyorsuláskorlát 1 legyen. ((-1, 1, 1, 1) szignatúrájú metrikát használunk.) Ekkor a négyessebességnégyzet -1, a lehetséges gyorsulásnégyzet 1. Van tehát 2 kényszer és 12 peremérték az $\vec{x}, \vec{u}$ négyesvektorok komponenseire. Descartes koordinátákkal $u(\tau) = \left(u^t \ \ u^x \ \ u^y \ \ u^z\right)$, ismeretlen a 4 komponens mint τ függvénye. A görbét ezen függvényekkel fogjuk megadni.

A kényszerek:

- sebességnégyzet

$$g_{ij} \cdot u^i \cdot u^j = -\left(u^t\right)^2 + \left(u^x\right)^2 + \left(u^y\right)^2 + \left(u^z\right)^2 = -1$$

- gyorsulásnégyzet

$$g_{ij} \cdot u'^i \cdot u'^j = -\left(u'^t\right)^2 + \left(u'^x\right)^2 + \left(u'^y\right)^2 + \left(u'^z\right)^2 = 1$$

- végsõ pozíció

$$x^{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^T u^x \, d\tau \\ \displaystyle\int_0^T u^y \, d\tau \\ \displaystyle\int_0^{veg} u^z \, d\tau \end{pmatrix} = 0$$

- peremfeltételek

$$\left(u^{\alpha}\right)(0) = 0$$
$$\left(u^{\alpha}\right)(T) = 0$$
$$\alpha = 1, 2, 3$$

Adott t_{max} koordinátaidõintervallumhoz keressük a minimális T sajátidõhöz tartozó görbét. Ezzel ekvivalens feladat rögzíteni az utazásra szánt T sajátidõt és keresni a maximális t_{max} koordinátaidõ- hosszúságú görbét. A peremértékeket ezért így a 0-ban és a T-ben rögzítjük és maximalizálandó

$$t_{max} = \int_0^T u^t \, d\tau = \text{maximum}$$

A Lagrange módszer:

$$\delta\left[\int_0^T \begin{matrix} u^t - \mu_\alpha \cdot u^\alpha - \lambda_1(\tau)\cdot\left[1 + -\left(u^t\right)^2 + \left(u^x\right)^2 + \left(u^y\right)^2 + \left(u^z\right)^2\right] \ldots d\tau \\ + \left(-\lambda_2(\tau)\right)\cdot\left[-1 + \left[-\left(u'^t\right)^2 + \left(u'^x\right)^2 + \left(u'^y\right)^2 + \left(u'^z\right)^2\right]\right] \end{matrix}\right] = 0$$

A kényszereket Lagrange multiplikátorral vezettük be. Mivel a változónk a négyessebesség, a térbeli pozícióperemfeltétel integrális kényszereket jelent. Ezeket az integrálokat μ együtthatókkal kivontuk. A sebesség és gyorsuláskényszereknek azonban minden idõpillanatban teljesülni kell, ezért 0-ra rendezve, tetszõleges idõfüggõ $\lambda(\tau)$ szorosaik sõt a τ szerinti integráljaiknak is el kell tûnni. Ezért ezeket is ilymódon belefoglaltuk az egyenletbe. Az integrandus, a Lagrange fv., 6 idõfüggõ mennyiség és a deriváltak függvénye. A μ konstansokat majd a végsõ pozíció kényszerbõl számíthatjuk ki.

$$L = L\left(\lambda_1, \lambda_2, u^t, u^x, u^y, u^z, u'^t, u'^x, u'^y, u'^z\right)$$

$$\mu_{1,2,3} = \text{konstansok}$$

A variációs feladat megoldását az Euler-Lagrange egyenletek adják.

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\xi'\right)}\right] - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

$$\xi = \left(\lambda_1, \lambda_2, u^t, u^x, u^y, u^z\right)$$

Explicite kiszámolva:

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\lambda_2 \cdot u'^x\right) + \lambda_1 \cdot u^x + \mu_x = 0 \tag{1}$$

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\lambda_2 \cdot u'^y\right) + \lambda_1 \cdot u^y + \mu_y = 0 \tag{2}$$

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\lambda_2 \cdot u'^z\right) + \lambda_1 \cdot u^z + \mu_z = 0 \tag{3}$$

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\lambda_2 \cdot u'^t\right) + \lambda_1 \cdot u^t - 1 = 0 \tag{4}$$

$$1 - \left(u^t\right)^2 + \left(u^x\right)^2 + \left(u^y\right)^2 + \left(u^z\right)^2 = 0 \tag{5}$$

$$-1 - \left(u'^t\right)^2 + \left(u'^x\right)^2 + \left(u'^y\right)^2 + \left(u'^z\right)^2 = 0 \tag{6}$$

Ezen differenciálegyenletrendszer a peremértékek figyelembevételével adja a megoldást. A másodrendû egyenletek u^t, u^x, u^y, u^z -ben szeparáltak és lineárisak, azonban a λ_1, λ_2 ismeretlen függvények kellemetlenül összecsatolják õket, ami az analítikus megoldást ellehetetleníti. Az (5),(6) illetve a μ-k meghatározására szolgáló "végsõ pozíció" kényszeregyenletek felhasználása tovább ront a helyzeten.

2.2. Az Euler-Lagrange egyenletek megoldása

A megoldást a sebességkényszer kiküszöbölésével kezdjük. Ehhez a Lagrange fvben a u^t, u^x, u^y, u^z Descartes felbontás helyett áttérünk az α, θ, ϕ hiperbolikus változókra.
$\alpha \in (-\infty .. \infty)$

$$u = \begin{pmatrix} u^t \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) \\ \mathrm{sh}(\alpha)\cdot\cos(\theta) \\ \mathrm{sh}(\alpha)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\phi) \\ \mathrm{sh}(\alpha)\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\theta \in (0..\pi), \quad \phi \in (-\pi..\pi)$$

Ezzel minden -1 négyzetû u megadható (és más nem). A gyorsulás

$$\vec{u}' = \alpha'\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\alpha) \\ \mathrm{ch}(\alpha)\cdot\cos(\theta) \\ \mathrm{ch}(\alpha)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\phi) \\ \mathrm{ch}(\alpha)\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\phi) \end{pmatrix} + \theta'\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\cdot\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\cdot\sin(\phi) \end{pmatrix} + \phi'\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\sin(\theta)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

A gyorsulást ezzel ortonormált vektorok lineárkombinációjaként fejeztük ki. (A vektorok a testhez rögzített tetrad Fermi-Walker transzportja.) A gyorsulásra vonatkozó kényszer tehát:

$$\alpha'^2 + \theta'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)^2 + \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)^2\cdot\sin(\theta)^2 - 1 = 0$$

A peremértékek:

$$\alpha(0) = \alpha(T) = 0$$
$$\theta(0) = \theta(T) = \frac{\pi}{2}$$
$$\phi(0) = \phi(T) = 0$$

Az α-ra vonatkozó peremértékek a kezdeti- és vésõ sebességre vonatkozó feltétel miatt adottak. Zérus α esetén ezen koordinátázás nem használható, ezért fel kell tegyük hogy a mozgás a T ideig nem tartalmaz megállást. Az egyenletek az idõtartomány belsejében használhatók. A kezdeti és végsõ θ és ϕ tetszõleges lehet, ezért választhatjuk a fenti módon.
A végsõ pozíció integrákis alakban fejezhetõ ki.

$$\int_0^T u^i\,d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^T sh(\alpha)\cdot\cos(\theta)\,d\tau \\ \int_0^T sh(\alpha)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\,d\tau \\ \int_0^T sh(\alpha)\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\,d\tau \end{pmatrix} = 0$$

Az Euler-Lagrange egyenletek az új változókkal

$$L = L(\alpha, \theta, \phi, \lambda, \alpha', \theta', \phi')$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial(\xi')}\right] - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

$$\xi = (\lambda, \alpha, \theta, \phi)$$

Szorítkozzunk elõször a síkbeli problémára $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta' = 0$. ($\lambda$ helyett a kétszeresét használjuk.)

$$L = ch(\alpha) - \mu_1\cdot sh(\alpha)\cdot\cos(\phi) - \mu_2\cdot sh(\alpha)\cdot\sin(\phi) - \frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot\left(\alpha'^2 + \phi'^2\cdot sh(\alpha)^2 - 1\right)$$

Az egyenletek explicite kifejezve

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda\cdot\alpha') + sh(\alpha) - ch(\alpha)\cdot\left(\mu_1\cdot\cos(\phi) + \mu_2\cdot\sin(\phi)\right) - \lambda\cdot\phi'^2\cdot sh(\alpha)\cdot ch(\alpha) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\lambda\cdot sh(\alpha)^2\cdot\phi'\right) - sh(\alpha)\cdot\left(-\mu_1\cdot\sin(\phi) + \mu_2\cdot\cos(\phi)\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha'^2 + \phi'^2\cdot sh(\alpha)^2 - 1\right) = 0$$

A μ kényszerek szögfüggvényei összevonhatók:

$$\mu_1\cdot\cos(\phi) + \mu_2\cdot\sin(\phi) = \mu\cdot\sin(\phi + \phi_0)$$

ahol μ_1, μ_2 konstansok helyett bevezettük az μ, ϕ_0-állandókat:

$$\mu = \sqrt{(\mu_1)^2 + (\mu_2)^2}$$
$$\sin(\phi_0) = \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)$$

A ϕ paraméter helyett ezentúl a $\Phi = \phi - \phi_0$-t használjuk, hogy ϕ_0 kiessen az egyenletekbõl.

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda \cdot \alpha') + \mathrm{sh}(\alpha) - \lambda \cdot \Phi'^2 \cdot \mathrm{sh}(\alpha) \cdot \mathrm{ch}(\alpha) - \mu \cdot \mathrm{ch}(\alpha) \cdot \sin(\Phi) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\lambda \cdot \mathrm{sh}(\alpha)^2 \cdot \Phi'\right) - \mu \cdot \mathrm{sh}(\alpha) \cdot \cos(\Phi) = 0 \tag{8}$$

$$\alpha'^2 + \Phi'^2 \cdot \mathrm{sh}(\alpha)^2 - 1 = 0 \tag{9}$$

Az $(1)-(6)$ egyenletrendszert sikerült három egyenletté egyszerûsíteni. Most persze már csak a síkbeli esetet vizsgáljuk. Megmutatható, hogy a Lagrange függvény θ-s tagjainak figyelembevételével csak a $\mu_3 \approx 0$ esetén tûnik el θ második deriváltja is.

Ezzel az egyenletek olyanok lettek, mintha csak az egyik irányban követelnénk meg a visszatérést. A μ együtthatók kiszámítására azonban a 3 koordinátaperemérték adott. Ezáltal $\Phi \neq \mathrm{const}$ esetben látszólag túlhatározott rendszert kapunk. Azonban vegyük észre, hogy a koordinátarendszer most nem tetszõlegesen van megadva, a ϕ_0 irányba forgattuk: úgy vettük fel, hogy a z és az x irányban automatikusan visszaérjünk, ha az y irányú visszatérést megköveteljük.

2.2. Egyenes és töröttvonalú mozgás

A $(7)-(9)$ egyenletekbõl rögtön leolvasható, hogy a $\phi = \mathrm{const}$, $|\alpha'| = 1$ megoldás. Tehát az egyenes vonalmenti mozgás extremális. Ekkor

$$\frac{d}{d\tau}\Phi = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\alpha = \pm 1$$

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda \cdot \alpha') + \mathrm{sh}(\alpha) - \mu \cdot \mathrm{ch}(\alpha) \cdot \sin(\Phi) = 0$$

$$\mu \cdot \mathrm{sh}(\alpha) \cdot \cos(\Phi) = 0$$

A visszatérés és végsõ megálláskényszer csak akkor teljesülhet, ha feltesszük hogy létezik legalább két olyan pont, ahol α deriváltja hirtelen elõjelet vált. Ebben a pontban tehát nem létezik a gyorsulás, az erre vonatkozó kényszer nem teljesül. Mindazonáltal az ilyen görbék elõállnak 1-nél kisebb gyorsulású kétszer differenciálható görbék határértékeként, tehát tetszõlegesen megközelíthetõ valóságos mozgással. Ugyanígy a Φ-nek lehet ugrása azon pontokban, ahol α zérus. Ezen megoldások tehát a fizikai térben töröttvonalak is lehetnek.
Integráljuk az egyenleteket!

$$\alpha(\tau) = t \cdot \chi_{(0,a)} - (t - 2 \cdot a) \cdot \chi_{(a,a+b)} + (t - 2 \cdot b) \cdot \chi_{(b,b+c)} + \mathrm{stb}$$

A $\Phi(\tau)$-ra két eset lehetséges. Vagy $\cos(\Phi) = 0$ azaz $\Phi = \pm\frac{\pi}{2}$, vagy $\mu \approx 0$ esetén $\Phi = \mathrm{const}$ tetszõleges. (A const ezentúl a fenti értelemben szakaszonként konstansot jelent.) De az üres tér izotrop, ezért egy megoldás elforgatottja is ugyanolyan megoldás kell legyen. A koordinátarendszert elforgatva más $\mu_{1,2}$ esetén teljesül a visszatérés. Ezért amikor áttérünk a μ, ϕ_0 állandókra, a Φ szög bevezetése (a $\mu \neq 0$ esetben) a kordinátarendszer ϕ_0-lal való elforgatását jelenti. Ez a forgatás épp visszaforgatja a koordinátarendszert az elõzõ helyzetbe, vagyis a fenti egyenletek elforgatásra invariánsak. Tehát nem muszáj μ-t $\mu \approx 0$-val korlátozni. Behelyettesítéssel a Lagrange multiplikátor is meghatározható.

$$\lambda = \frac{1}{\alpha'(\tau)} \cdot \left[\int (\mu \cdot \mathrm{ch}(\alpha) \cdot \sin(\phi) - \mathrm{sh}(\alpha))\, d\tau \right] = \frac{-1}{\alpha'} \cdot \left(\int \mathrm{sh}(\alpha)\, d\tau \right)$$

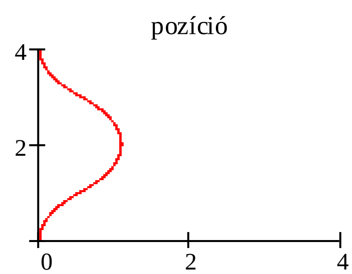
$$r(\tau) := \left(\int_0^{\tau} \sinh(\alpha(y))\, dy \right)$$

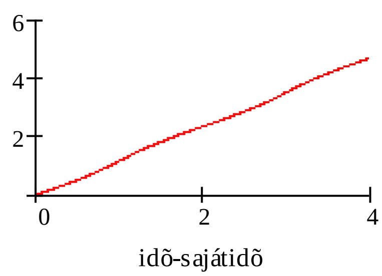
Az $\alpha(\tau)$ töréspontjai az a, b, c, d, ... függvényében több megoldás lehetséges. A "végsõ pozíció" egyenlet is csak egyetlen megszorítás ezekre vonatkozóan

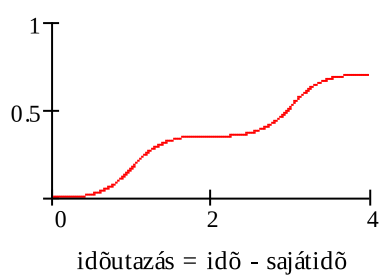
$$t(\tau) := \left(\int_0^{\tau} \cosh(\alpha(y))\, dy \right)$$

$$0 = \int_0^T \mathrm{sh}(\alpha) \cdot \cos(\phi)\, d\tau, \quad 0 = \int_0^T \mathrm{sh}(\alpha) \cdot \sin(\phi)\, d\tau$$

A legegyszerûbb ilyen amikor csak két "foga" van az $\alpha(\tau)$ fûrészjelnek. Ebben az esetben a végsõ pozíció kényszer elforgatás erejéig egyértelmûen meghatározza a görbét. A pálya egyenesvonalú







Ekkor a T sajátidõ után eltelt koordinátaidõ $t(T) = 4\cdot\mathrm{sh}\left(\frac{T}{4}\right)$. Nagy T esetén tehát az idõutazás exponenciá- lisan nõ T-vel. A használt egységrendszer g=1, c=1-nek felel meg. Ha a gyorsulás g=9.8 m/s akkor az idõt a képletben évben mérjük.
Azt kaptuk tehát, hogy a fizikai térben töröttvonalú pálya extrémális az idõutazás szempontjából. Az egyenes szakaszokon az α sebességparaméter állandó ütemben nõ vagy csökken, a fordulás az α=0 tulajdonságú pontokban lehetséges. Az Euler-Lagrange módszer szerint a valódi maximális idõutazáshoz tartozó pálya címére ezen megoldások mindegyike jogosan pályázhat.

2.3. Görbevonalú pályák

Most keressünk olyan megoldást melyre $\phi' > 0,\ \alpha > 0$ mindig teljesül. Itt nehezebb a feladat, hisz $\lambda(\tau)$ és $\lambda'(\tau)$ ismeretlen fv.-ek nem esnek ki azonnal. Megfigyelhetõ azonban, hogy az egyenleteket λ-val ill. λ^2-tel szorozva, minden τ derivált elõtt szerepel a λ szorzó. Új idõkoordinátát, ξ-t bevezetve ezért a λ'-k kiesnek.

$$\lambda\cdot\frac{d}{d\tau}\blacksquare = \frac{d}{d\xi}\blacksquare \qquad \xi(\tau) = \int \frac{1}{\lambda}\,d\tau$$

Ezzel az egyenletek

$$\alpha'' - \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\mathrm{ch}(\alpha) - \lambda\cdot(\mu\cdot\mathrm{ch}(\alpha)\cdot\sin(\phi) - \mathrm{sh}(\alpha)) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\mathrm{sh}(\alpha)^2\cdot\phi'\right) - \lambda\cdot\mu\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\cos(\phi) = 0$$

$$\alpha'^2 + \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)^2 - \lambda^2 = 0$$

A vesszõ már az új ξ idõ szerinti deriálást jelenti, a változók a ξ függvényei.

$$\alpha'' - \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\mathrm{ch}(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha'^2 + \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)^2}\cdot(\mu\cdot\mathrm{ch}(\alpha)\cdot\sin(\phi) - \mathrm{sh}(\alpha))$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\mathrm{sh}(\alpha)^2\cdot\phi'\right) = \pm\sqrt{\alpha'^2 + \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)^2}\cdot\mu\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\cos(\phi)$$

A görbe ξ szerinti paraméterezésének irányítása legyen azonos a τ-val való paraméterezéssel, ezért válasszuk a + elõjelet! Kifejezve a második deriváltakat:

$$\alpha'' = \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\mathrm{ch}(\alpha) + \sqrt{\alpha'^2 + \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)^2}\cdot(\mu\cdot\mathrm{ch}(\alpha)\cdot\sin(\phi) - \mathrm{sh}(\alpha))$$

$$\phi'' = -2\cdot\phi'\cdot\alpha'\cdot\mathrm{cth}(\alpha) + \sqrt{\left(\frac{\alpha'}{\mathrm{sh}(\alpha)}\right)^2 + \phi'^2}\cdot\mu\cdot\cos(\phi)$$

A peremfeltételek

$$T = \int_0^{\xi(T)} \sqrt{\alpha'^2 + \phi'^2 \cdot \mathrm{sh}(\alpha)^2}\, d\xi$$

$$\alpha(0) = 0$$

$$\alpha(\xi(T)) = 0$$

A differenciálegyenletrendszer tehát ezzel két másodrendû egyenletté egyszerûsödött! Ennek numerikus megoldása már reményteli lehet. Így tetszõleges $\alpha, \phi, \frac{d\alpha}{d\xi}, \frac{d\phi}{d\xi}, \mu$ kezdõértékekre megadható egy késõbbi idõpillanatban α és ϕ értéke. A $\frac{d\alpha}{d\xi}, \frac{d\phi}{d\xi}, \mu$ hármas megválasztása kell biztosítsa a visszatérés és végsõ megállás kényszerét. (A kezdetifeltétel ezekre nem ad megszorítást.)

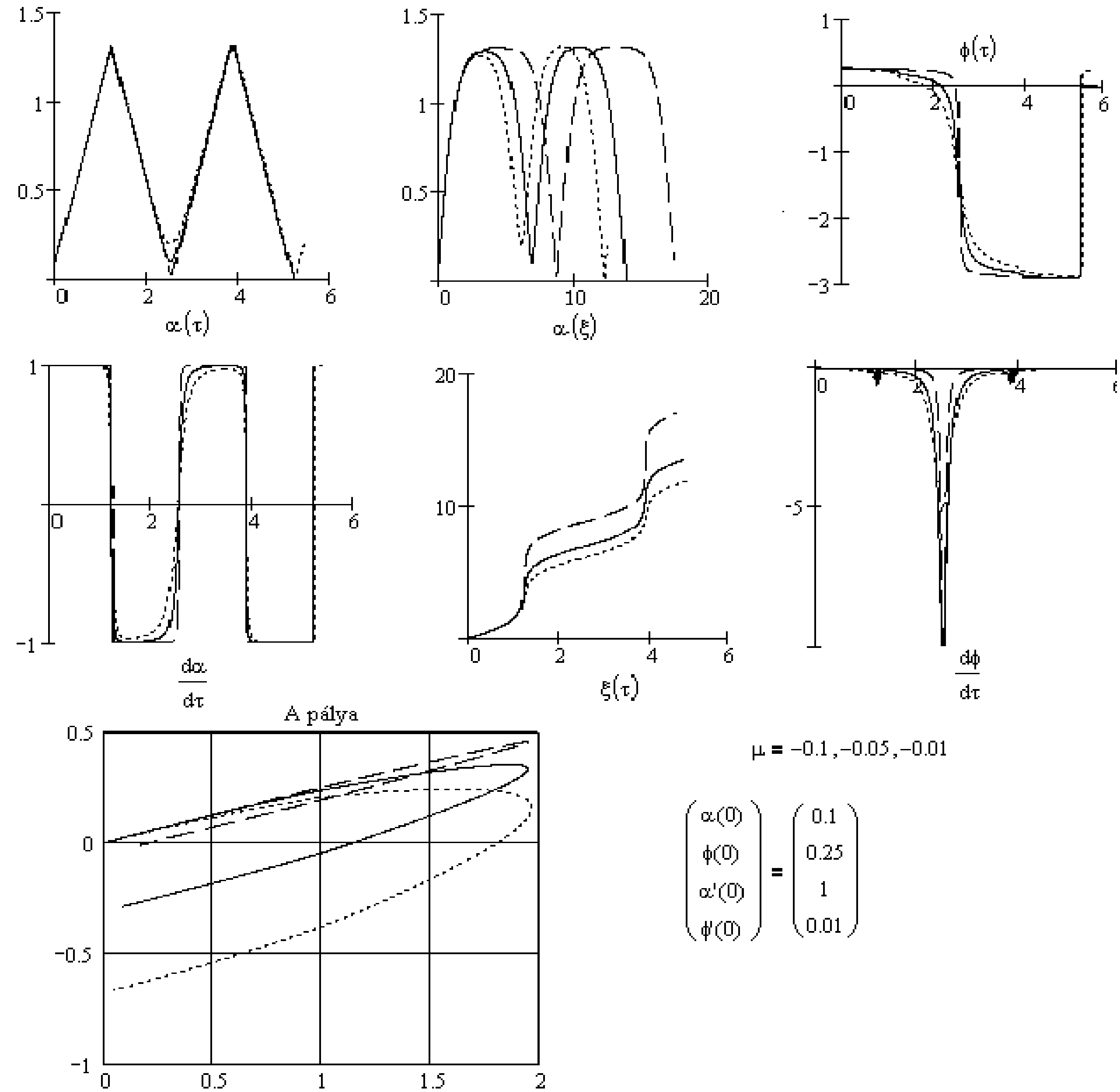
A numerikus szimuláció hátrányai:

- A megoldás nem egyértelmû. Elvben több $\frac{d\alpha}{d\xi}, \frac{d\phi}{d\xi}, \mu$ választás is adhat adott T esetén visszatérõ pályát. Ezek mindegyike extrémális megoldás, feltérképezésük maradéktalanul szükséges a valódi optimális idõutazás megkereséséhez.
- Az iteráció a kis sebességû (α-jú) tartományban numerikusan instabil. Ha α bárhol 0-vá válik, akkor tetszõleges törése lehet a pályának.

A paraméterek szisztematikus változtatásával a következõ megfigyeléseket tehetjük.

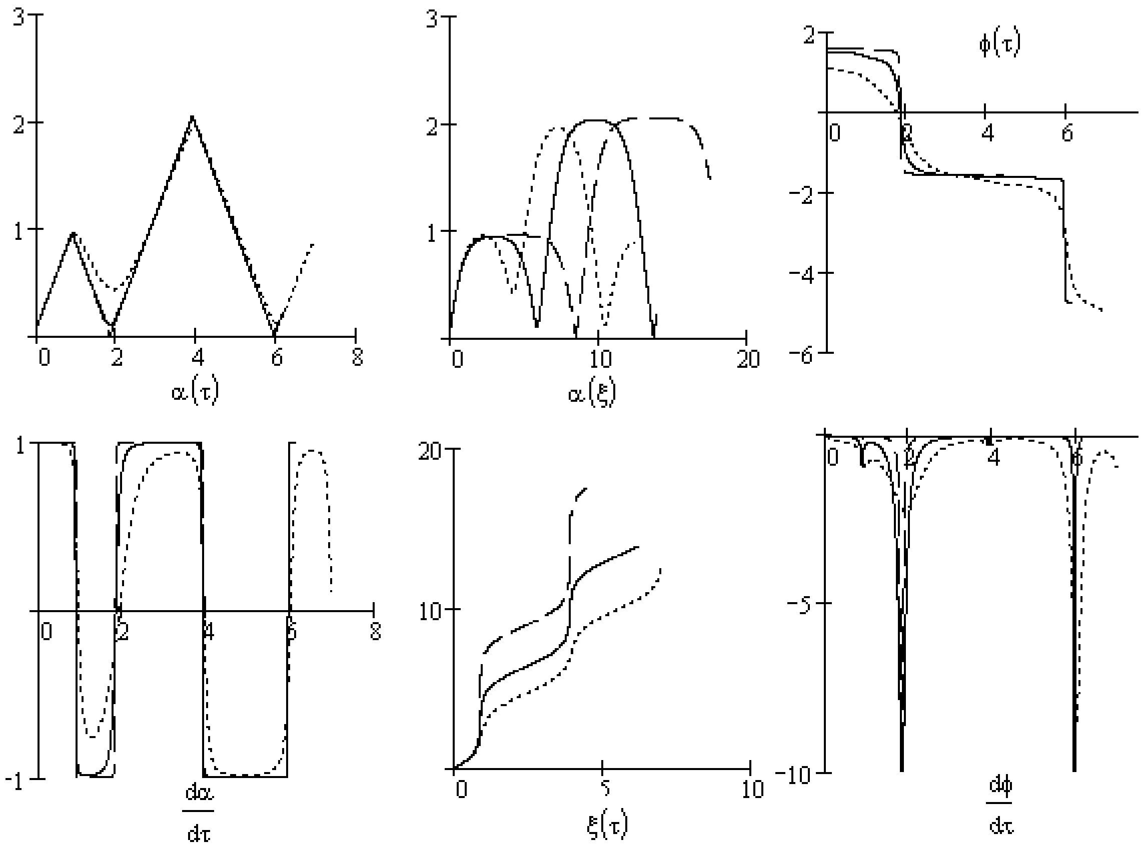
- Kis μ esetén, tetszõleges $\frac{d\alpha}{d\xi}, \frac{d\phi}{d\xi}$ paraméterekre $\phi(\tau)$ hamar közel konstanssá válik. Az $\alpha(\tau)$ gyakorlatilag szakaszonként lineárisan változik. A $\alpha'(\tau)$=+1-gyel indul, de helyenként T ezredrészénél gyorsabban elõjelet vált. A numerikus szimuláció feltehetõen ezen tartományban is instabil. Vegyük észre, hogy így tulajdonképpen az elõzõekben vizsgált töröttvonal esetét kaptuk meg.
- Közepes μ esetén ($1>\mu>0.1$) csak $\frac{\pi}{2}$ közeli ϕ, 0 közeli $\frac{d\phi}{d\xi}$ kezdõfeltételek esetén kapunk visszatérõ megoldást. A megoldások a kis μ esetben megfigyelthez hasonlók, de a stabil ϕ értékek $\pi/2$ egész többszörösei.
- Nagy μ-re ($\mu>1$) nem kapunk visszatérõ megoldásokat. $\alpha(\tau)$ folyamatosan nõ.

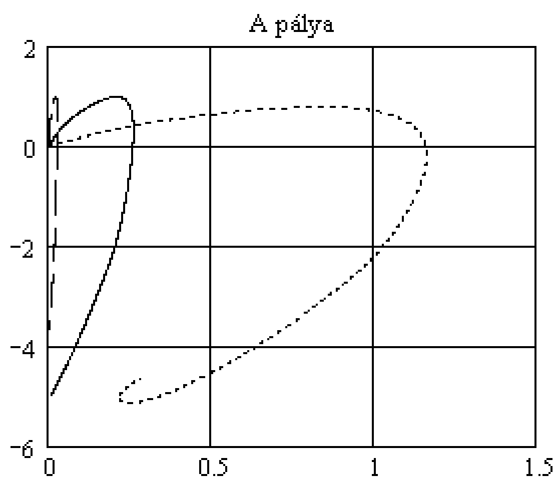
A jellegzetes megoldásfajták az ábrákon
megfigyelhetõk.



Ábra /fent/: egyre kisebb μ esetén, "egyre egyenesebbé" válik a pálya. Ezen kezdõfeltételek esetén ugyan nem zárul a pálya, de mint látni fogjuk ez nem is érhetõ el görbevonalú pályákkal. Az egyenletek viselkedése azonban látványos: az $\alpha(\tau)$ jó közelítéssel fûrészjel, de az $\alpha(\xi)$ "jól viselkedõ" függvény!

/lent/: Nagyobb μ esetén a pálya annál "hosszúkásabb" $\phi(0)$ minél közelebb van $\pi/2$-hez. $\alpha(\tau)$ deriválja ismét ± 1 között ugrál, a haladási irány $\phi(\tau)=\pi/2+n\pi$ esetén stabil ahol n egész. A pálya görbülete a görbe legnagyobb szakaszán kicsi.





$$\begin{pmatrix}\alpha(0)\\ \alpha'(0)\\ \phi'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.1\\ 1\\ 0.01\end{pmatrix}$$

$$\phi(0) = \frac{\pi}{2} - 0.01, 0.1, 0.5$$

$$\mu = -0.5$$

Az ábrákon látható megoldások adaptív lépéshosszváltoztatással 2000 iterálással adódtak. A differenciálegyenletek numerikusan kezelhetetlenné válnak a 0 környékén, ezért innen nem érdemes tovább folytatni a szimulációt. (Ennek oka, hogy a paraméterezésnek szingularitása van az α=0-ban.)

A nemzérus $\alpha(\tau)$ esetén az $\alpha(\tau)$ látszólagos törése nem numerikus hiba, hisz az egyenletek $\alpha(\xi)$ paraméterezéssel lettek megoldva. Látható, hogy a ξ–vel való paraméterezéssel kitranszformáltuk ezeket a töréspontokat, ezzel megfelelõképpen "széthúztuk" ezen pontok környezetét. Egyéb kezdõfeltételekkel is próbálkozva azt tapasztalhatjuk, hogy α elõbb-utóbb csökkenni kezd és a derivált néhány osszcillációja után α zérussá válik. Ez a pont azonban általában a kiindulóponttól távol esik.

Az Euler-Lagrange módszerrel a nemzérus variációjú idõutazásgörbéket könnyen eliminálhatjuk. Ezzel olyan görbékre szûkíthetjük le a lehetséges görbék halmazát, aminek a görbülete az idõ legnagyobb részében zérus. Térjünk egy pillanatra vissza a bevezetõben említett téridõbeli differenciálgeometriai megfogalmazásra: adott kezdeti és érkezõérintõvektorokra adott téridõpontok között keressük a maximálisan 1 négyesgörbületû téridõgörbét, amely négyeshossza minimális. Ki hitte volna, hogy ennek térvetülete töröttvonal, amely 3-as görbülete még csak nem is feltétlenül korlátos! Elsõ ránézésre meghökkentõ hogy egyátalán létezik korlátos négyesgyorsulású de nem korlátos 3-as görbületû mozgás. A magyarázat a négydimenziós téridõ és a háromdimenziós fizikai tér közötti azon óriási különbségben rejlik, hogy a fizikai térben "meg lehet állni", zérus sebesség után pedig tetszõleges irányban kezdhetünk gyorsulni. A sík téridõben azonban az idõ mindig elõre halad.

Hogyan folytatható a variációs megoldás? Ha valahogy sikerül megkapni az összes kezdõfeltételt amibõl a differenciálegyenletrendszer T sajátidõ után teljesíti a peremfeltételeket, ezeket vissza kell helyettesíteni a $t = \int \mathrm{ch}(\alpha)\,d\tau$ képletbe és a numerikusan megkapott megoldásjelöltek közül ki kell választani az egyben maximális extrémális pályát. Infinitezimális lépésekben tehát elvileg sem kapható meg a végeredmény, globális összehasonlításra van szükség.

A megoldást szimmetriaelvekre támaszkodva új alapokra helyezhetjük. A Minkowski metrikában gyorsuló rakéta maximális idõutazásgörbéje annyira egyszerû, hogy a Lagrange módszer teljes mellõzésével is eredményhez juthatunk. Általános téridõben a két módszer együttes alkalmazására van szükség.

3.1. A globális út

A megoldásra vonatkozó hipotézis az elõzõekkel összhangban a fizikai térben az egyenesvonalú pálya. A téridõgörbék sokfélesége annyi patológikus eset összehasonlítását igényli, hogy direkt egyszerû módon nem bizonyítható az eredmény. Szükséges némiképp leszûkíteni a lehetséges görbék halmazát.

A megoldás könnyebb megérthetõsége miatt elõször precíz definíciókkal megfogalmazzuk a feladatot és a problémában alkalmazható szimmetriatranszformációkat. Ezek felhasználásával kezelhetõvé válik az egydimeziós probléma esete. (Korábban nem láttuk be, hogy hányszor vált elõjelet a gyorsulás az út során.) Utána megnézzük, hogy milyen becslésekkel lehet az általános esetet vizsgálni. Így könnyen megkapjuk a számítógépes próbálkozások során tapasztalható tulajdonságot, miszerint a fizikai térbeli optimális görbe legnagyobb részének kicsi a görbülete. Ezzel elkülöníthetõvé válnak a közel egyenes és a fordulószakaszok, amelyek rövid vizsgálával látható, hogy a maximális idõutazás valóban az egyenesvonalú esetben adódik.

Legyen I inerciarendszer. Mindent I-ból nézve fogalmazunk meg. Szorítkozzunk a 2+1 dimenziós esetre. A t=const térszerû hiperfelületet jelöljük S-sel. Mivel a Minkowski téridõ stacionárius ezeket azonosíthatjuk és jelölhetjük t-tõl függetlennek.

Definíció: *Idõutazás* az az idõszerû görbe a téridõben, amelyre a gyorsulásnégyzet legfeljebb 1, a K kezdeti és V végpontra a térvetületek megegyeznek $\mathrm{pr}_S(K) = \mathrm{pr}_S(V)$ és az ottani sebességek zérusok. Az egyszerûség kedvéért célszerû nem megkövetelni, hogy a gyorsulás mindenütt értelmezett legyen, csak azt, hogy a görbe álljon elõ mindenütt értelmezett gyorsulású idõutazások határértékeként. A K és V közt eltelt idõ t, sajátidõ T. Az idõutazások tehát speciális görbék I-ben, amit a τ sajátidejükkel paraméterezhetünk.

Két idõutazás ζ és ξ *összehasonlítható*, ha a hozzájuk tartozó valamelyik utazásidõ megegyezik, azaz $T_\zeta = T_\xi$ vagy $t_\zeta = t_\xi$ teljesül. Ezek között *rendezés* $\zeta \ge \xi$, ha egyidejûleg $t_\zeta \ge t_\xi$ vagy $T_\zeta \le T_\xi$. Két idõutazás ekvivalens, ha mind t és T közös.

Rögzített T vagy t esetén az ekvivalenciaosztályok között *metrika* $d(\zeta,\xi) = \left|t_\zeta - t_\xi\right|$ vagy $d(\zeta,\xi) = \left|T_\zeta - T_\xi\right|$. Ekvivalens idõutazásokra mindkét képlet zérust ad.

Rögzített T esetén *maximális idõutazásnak* (**MI**) nevezzük az ilyen idõutazások supremumának elemeit, amelyekre tehát pl. rögzített T esetén t supremális.

Legyen $\mathrm{SMI} := \mathrm{pr}_S(\mathrm{MI})$, a maximális idõutazás térvetülete .

Az idõutazások kvantitatív kezelésére a szokásos spec. rel. módszert használjuk:
Egy idõszerû mozgás sebessége és gyorsulása

$$\overrightarrow{u(\tau)} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha(\tau)) \\ \mathrm{sh}(\alpha(\tau))\cdot\cos(\phi(\tau)) \\ \mathrm{sh}(\alpha(\tau))\cdot\sin(\phi(\tau)) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a(\tau)} = \alpha'\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\alpha(\tau)) \\ \mathrm{ch}(\alpha(\tau))\cdot\cos(\phi(\tau)) \\ \mathrm{ch}(\alpha(\tau))\cdot\sin(\phi(\tau)) \end{pmatrix} + \phi'\cdot\mathrm{sh}(\alpha)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

A görbét az α, ϕ függvényekkel jellemezzük. Az idõutazásra

$$\alpha'^2 + \phi'^2\cdot\mathrm{sh}(\alpha)^2 \le 1$$

$$\alpha(0) = \alpha(T) = 0$$

$$0 = x(T) = \int_0^T \mathrm{sh}(\alpha)\cdot\cos(\phi)\,d\tau$$

$$0 = y(T) = \int_0^T \mathrm{sh}(\alpha)\cdot\sin(\phi)\,d\tau$$

Az utazási koordinátaidõ:

$$t = \int_0^T \mathrm{ch}(\alpha)\,d\tau$$

Egy MI mozgásra tehát amelyet (T, t) jellemez igaz, hogy T rögzítése esetén nincs nagyobb t-jû, t rögzítésére nincs kisebb T-jû idõutazás.

3.2. Általános tételek

A definíciók egyszerû következményeit fogalmazzuk meg. Elsõként, hogy a szuprémummal definiált maximális idõutazás ekvivalenciaosztály benne van az idõutazások halmazában, tehát maximális elem. Másodjára belátjuk, hogy a maximális idõutazás végig kihasználja a maximális gyorsulást. Végül megmutatjuk, hogy az MI a téridõ "minden τ–intervallumában maximális".
Állítás: Az MI idõutazás
bizonyítás: Rögzített T-jû idõutazásokra bármely két elem összehasonlítható. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz: létezik egy olyan növekvõ t_n sorozat, amelynek d-határértéke t olyan téridõgörbéhez tartozik, amely nem idõutazás. Mivel minden idõutazás korlátos, folytonos és a teljes [0,T] intervallumon értelmezett, ezért pontosan τ-pontonként konvergens idõutazássorozatokat kell tekinteni. Nyilvánvaló, hogy végesen értelmezett, korlátos α'-ú idõszerû görbék határértéke idõszerû. Az α konvergenciája egyenletes hisz a α_n egyenletesen Lipschitzes (a gyorsuláskényszer szerint) és mindenütt értelmezett, ezért a határérték is egyenletesen Lipschitzes. (Az α' nem biztos, hogy mindenütt értelmezett, de ezt nem is követeltük meg.) A peremfeltételek triviálisan teljesülnek.
Megjegyzés: Legyen T rögzített. Látható, hogy α' korlátos, ezért α korlátos. A sebességvektor α-nak folytonos fv-e, ezért az idõutazás halmaz korlátos, hisz korlátos folytonos fv. kompakt halmazon vett integrálja korlátos. Az elõzõ tétel alapján látható, hogy a halmaz zárt. Viszont a téridõ véges dimenziós ezért az idõutazások halmaza *kompakt*.
Állítás: Az MI gyorsulásnégyzete λ-m.m. 1
bizonyítás: Ezalatt lényegében azt értjük, hogy nincs olyan nyílt intervallum, ahol midenütt kisebb mint 1, vagy nem értelmezett. Tfh. van. Ekkor érdemesebb ezen intervallum belsejében a sebességet maximálisra növelni (i.e. növelni |α'|-t), hisz adott útra a $t - T$ ekkor nõ, T csökken:

$$d(t-\tau) = (\mathrm{ch}(\alpha) - 1)\cdot d\tau = \frac{\mathrm{ch}(\alpha) - 1}{\mathrm{sh}(\alpha)}\cdot ds = \mathrm{th}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot ds$$

ahol ds a térbeli görbe (SMI) megfelelõ szakaszan az ívhossz. A maradék idõben akármit csinálhatunk, hogy T ne változzon, de t nagyobb lesz. Ez ellentmondás. Maximálisra meg pontosan akkor növeljük a sebességet, ha α'^2 maximális, azaz ha kihasználjuk az 1 gyorsulást.
Állítás: Az MI τ_1, τ_2-höz tartozó két pontjában a sebesség $u(\tau_1), u(\tau_2)$. A téridõ ezen pontjai között

az 1-ségnyi gyorsulású, azonos $u(\tau_1)$ kezdõ- és $u(\tau_2)$ végsebességû pályák közül az MI mentén legrövidebb a sajátidõ.
bizonyítás: Ha egy másik pálya mentén rövidebb lenne a két pont között eltelt sajátidõ, ezen pályát kiterjesztve az eredeti MI τ_1 elõtti és τ_2 utáni szakaszával kisebb sajátidejû pályát kapnánk azonos t-hez. A kiterjesztés is MI, hiszen a határokon a sebesség folytonosan megy át és a tartományok belsejében a gyorsulás az eredetivel azonos.

3.3. Alapvető szimmetriák

Definíció: Szimmetriának nevezzük azokat az $\text{idõutazás} \rightarrow \text{idõutazás}$ függvényeket, amelyek egy (t, T) ekvivalenciaosztály egyik eleméhez hozzárendelik egy másik elemét. Mivel általában elég az $\alpha(\tau)$, $\phi(\tau)$, sõt az $\alpha'(\tau)$, $\phi'(\tau)$ függvényekkel definiálni a téridõbeli mozgást általában eleve csak ezen $R \rightarrow R$ függvények, sõt olykor csak ezen deriváltjainak transzformációit tekintjük. Ezen mûveletek megkönnyítik az idõutazások összehasonlítását.

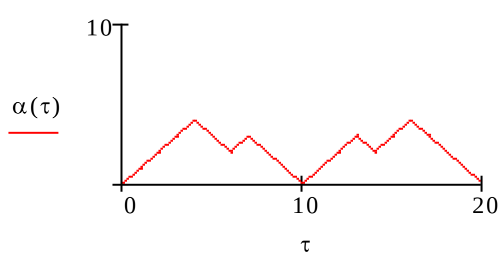
Idõszakaszok permutációja: A gyorsulás és az integrális kényszerek idõfüggetlenek. t kiszámítása is egy τ integrál maga is idõeltolásinvariáns. A görbe különbözõ összefüggõ részeit tehát felcserélhetjük, amennyiben a határon a sebességek azonosak. A térvetületnek nem kell a határokon megegyezni, ha a visszatéréskényszert az integrális alakban számítjuk. (Gondoljunk a téridõértelemtõl elvonatkoztatva a transzformációra, csak az $\alpha(\tau)$, $\phi(\tau)$ függvényeket transzformáljuk.)

Idõszakasz tükrözés: Valamelyik összefüggõ mozgásszakaszt idõben visszafelé végezve a t integráljárulék azonos, de a visszatéréskényszer nem teljesül automatikusan. Csak ezt és a határok sebességét figyelembevéve lehet idõtükrözést csinálni.

Térbeli eltolás: A megadott formában használt visszatéréskényszer szempontjából érdektelen, hogy a térbeli mozgásszakaszokat eltologatva képzeljük-e el. Ha mint téridõgörbére gondolunk, az idõpermutációt a megfelelõ téridõeltolással kell alkalmaznunk, hogy a folytonosság megmaradjon.

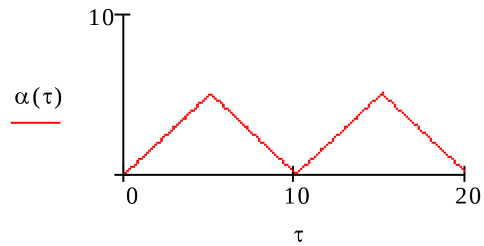
3.4. Egyenesvonalú mozgás

Ha az SMI egyenesvonalú, a gyorsuláskényszer alapján $|\alpha'| \le 1$, ϕ konstans. Ezzel definiáltuk az *egyenesvonalú idõutazás*t és az *egyenesvonalú maximális idõutazás*t.



Definíció: Az egyenesvonalú idõutazás *n-fogú* ha $|\alpha'| = 1$ és az $|\alpha(\tau)|$ fv-nek pontosan 2n-1 törése van a teljes mozgás során. Szemléletesen, ahány foga van az $|\alpha(\tau)|$ fûrészjelnek.
Állítás: Az egyenesvonalú MI kétfogú, amire $t = 4 \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{T}{4}\right)$
bizonyítás: Elõször alkalmazzuk az idõeltolásszimmetriát. Cseréljük fel a kifelé és a befelé jövõ mozgásszakaszokat úgy, hogy a kifelé menõ részek kerüljenek elõre, a visszafelé jövõk a végére. A felcserélések lehetségesek hisz az összeillesztési pontokban α=0. A térbeli

eltolásszimmetria miatt folytonosan összeilleszthetjük ezeket. Ezzel egy ekvivalens MI-t kaptunk.
Legyen az SMI legtávolabbi pontja P. Ez nyilvánvaló megállási pont, itt α=0.
A KP és a PV szakaszt növeljük meg a maximálisra $|\alpha|$ tekintetében. Ekkor kétfogú mozgást kapunk, eredetileg más mozgásra ez valódi növelés. A két szakasz sajátideje csökken, de a t koordinátaidõ is csökken. Azonban, mint láthatjuk, a $t - T$ különbség nõ.



$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2$$

$$dx^2 = dt^2 - d\tau^2 = (dt - d\tau)\cdot(dt + d\tau)$$

$$d(t-\tau) = \frac{dx^2}{dt + d\tau} = \frac{sh(\alpha)}{1 + ch(\alpha)}\cdot dx = th\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot dx$$

A dx együttható $\alpha > 0$ növelésével nagyobb lesz. Ha integrálunk a rögzített KP és PV végpontok között,
a $t - T$ nagyobb lett. Közben T csökkent, a maradék idõben bármit csinálhatunk (pl. egyhelyben állhatunk) és végül a teljes t koordinátaidõ az elõzõnél nagyobb lett. Ha tehát nem kétfogú volt a görbe ellentmondásra jutottunk.
Az $\alpha(\tau)$ kétfogú fûrészjel, ezért t a ch(α) τ-integrálja, ami épp az állításban foglaltal egyenlõ.

3.5. Becslések

Ebben a pontban leszûkítjük az a halmazt amiben a maximális idõutazást keressük.
Triviális, hogy adott T-re egy MI-nek t>T, hisz α=0 mindenütt minorálja az α paramétert és erre $t = T$. Másrészt t kisebb az egyfognál, hisz az pontonként majorálja az $\alpha(\tau)$ sebességet. Tehát:

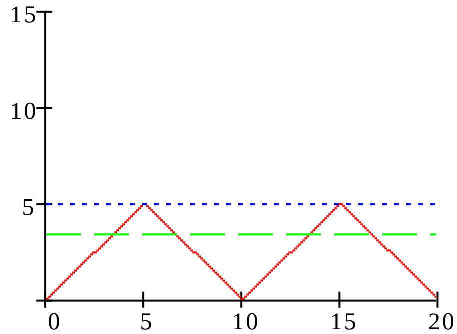
$$0 < t - T < 2\cdot sh\left(\frac{T}{2}\right) - T = 2\cdot\left(\frac{T}{2} + \frac{T^3}{3!\cdot 2^3} + \ldots\right) - T = \frac{T^3}{3!\cdot 2^2} + \frac{T^5}{5!\cdot 2^4} \ldots$$

Ha $T < 1$, akkor $(t - T) \approx 0$, azaz $t \approx T$. Ekkor tehát közelítõleg az összes idõutazás MI. Nagy T-re viszont jelentõs különbségek lehetnek. Az álló idõutazásra például $t = T$, viszont a kétfogra $\frac{T}{4}\cdot sh\left(\frac{T}{4}\right)$ Ezentúl ezért csak a T>>1 esetet fogjuk vizsgálni.

Legyen az egyenesvonalú kétfog maximális sebességparamétere $\bar{\alpha} = \frac{T}{4}$, az MI idõutazásra legyen α_{max}. A következõ állításokban belátjuk, hogy $\alpha_{max} \approx \bar{\alpha}$, ha $\alpha_{max} < \bar{\alpha}$. Az SMI pálya hosszúkás, tehát $\Delta\phi_\lambda \approx 0$ teljesül az út $s_\lambda \approx s$ hosszú hányadán.

<u>Állítás:</u> Az MI-re $\alpha_{max} > \bar{\alpha} - \ln(\bar{\alpha})$

<u>bizonyítás:</u> A kétfog idõutazásra $t = 4\cdot sh\left(\frac{T}{4}\right)$, ennél az MI-nek nem lehet kisebb az eltelt t koordinátaideje.



$$4\cdot sh\left(\frac{T}{4}\right) \le t = \int_0^T ch(\alpha)\,d\tau \le T\cdot ch(\alpha_{max}) = 4\cdot\bar{\alpha}\cdot ch(\alpha_{max})$$

$$4\cdot sh(\bar{\alpha}) < 4\cdot\bar{\alpha}\cdot ch(\alpha_{max})$$

$$\alpha_{max} > arch\left(\frac{sh(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}}\right) \approx \ln\left(\frac{e^{\bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}}\right) = \bar{\alpha} - \ln(\bar{\alpha})$$

<u>Állítás:</u> Az $\alpha(\tau) \ge \lambda\cdot\alpha_{max}$ szakasz SMI-beli ívhossza legyen s_λ. ($\lambda\cdot\alpha_{max}$>>1) Erre közelítõleg $s_\lambda > s\cdot\left[1 - T^2\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\bar{\alpha}}\right]$, azaz az út döntõ hányada ebbe a szakaszba esik. Az eltelt koordinátaidõre hasonlóképpen $t_\lambda > t\cdot\left[1 - T^2\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\bar{\alpha}}\right]$

<u>bizonyítás:</u> Elõször belátunk egy általánosabb összefüggést az ds-dα kapcsolatra:

$$\left(ds = sh(\alpha)\cdot d\tau = \frac{sh(\alpha)}{\alpha'}\cdot d\alpha\right) > sh(\alpha)\cdot d\alpha = d(ch(\alpha))$$

Alkalmazva az állításra:

$$s_\lambda > ch(\alpha_{max}) - ch(\lambda\cdot\alpha_{max}) > \left[\frac{e^{\alpha_{max}} - \left(e^{\lambda\cdot\alpha_{max}} + e^{-\lambda\cdot\alpha_{max}}\right)}{2}\right] \approx \left[\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\alpha_{max}}\right)\cdot\left[1 - e^{-(1-\lambda)\cdot\alpha_{max}}\right]\right]$$

$$\frac{s_\lambda}{s} > \frac{s_\lambda}{s_\lambda + T\cdot sh(\lambda\cdot\alpha_{max})} > \left[\frac{1 - e^{-(1-\lambda)\cdot\alpha_{max}}}{1 - e^{-(1-\lambda)\cdot\alpha_{max}} + T\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\alpha_{max}}}\right] \approx \left[1 - T\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\alpha_{max}}\right]$$

Az elõzõ állítással azonban α_{max} majdnem $\overline{\alpha}$:

$$\left[1 - T\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\alpha_{max}}\right] > 1 - T\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\left(\overline{\alpha}-\ln\left(\overline{\alpha}\right)\right)} = 1 - T\cdot\left(\overline{\alpha}\right)^{1-\lambda}\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\overline{\alpha}} > 1 - T^2\cdot e^{-(1-\lambda)\cdot\overline{\alpha}}$$

A koordinátaidõ $dt = \left(ch(\alpha)\cdot d\tau\right) \approx \left[\left(0.5e^{\alpha}\right)\cdot d\tau\right] \approx ds$ miatt hasonlóképpen becsülhetõ.

<u>Állítás:</u> Az összes elfordulás az $\alpha(\tau) \ge \lambda\cdot\alpha_{max}$ szakaszban legyen ϕ_λ. Erre $\phi_\lambda < T^2\cdot e^{-\lambda\cdot\overline{\alpha}}$, tehát az ilyen szakaszok közelítõleg egyenesvonalúak.
<u>bizonyítás:</u> Az elfordulás-τ viszonyra

$$d\phi \le \frac{1}{sh(\alpha)}\cdot d\tau$$

Behelyettesítve:

$$\phi_\lambda < \left(\frac{1}{sh\left(\lambda\cdot\alpha_{max}\right)}\cdot T\right) \approx \left(T\cdot e^{-\lambda\cdot\alpha_{max}}\right) < T\cdot e^{-\lambda\cdot\left(\overline{\alpha}-\ln\left(\overline{\alpha}\right)\right)} = T\cdot\left(\overline{\alpha}\right)^{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot\overline{\alpha}} < T^2\cdot e^{-\lambda\cdot\overline{\alpha}}$$

<u>Következmény:</u> Az elõzõek szerint az MI α_{max} és $\lambda\cdot\alpha_{max}$ közti része (pl. $\lambda = 0.5$) az SMI út döntõ hányada, ami lényegében egyenes. Ez nem lehet összefüggõ, hisz ekkor nem teljesülhet a visszatérés az utazás végére. Tehát legalább két diszjunkt összefüggõ gyors szakasz van, és a kettõ között a visszafordulást $\alpha < \lambda\cdot\alpha_{max}$ sebességgel lehet megtenni. Továbbá erre $\Delta\phi \approx \pi$.

3.6. A fordulószakasz

<u>Állítás:</u> (i) Az MI $\alpha(\tau) \ge \lambda\cdot\alpha_{max}$ gyors szakaszai között a visszafordulás egyenesvonalú és tartalmaz megállást.

(ii) A MI-nek egy belsõ fordulószakasza van, azaz nincs 2 diszjunkt összefüggõ tartomány a kifelé és a befelé jövõ $\left(\lambda\cdot\alpha_{max}..\alpha_{max}..\lambda\cdot\alpha_{max}\right)$ sebességû részek között.

<u>bizonyítás:</u> Kiszámoljuk, hogy adott $\lambda\cdot\alpha_{max}$ kezdõ- és végsebességre milyen fordulás tart minimális $\Delta\tau$ sajátideig. A koordinátaidõ alakulását kellõen kis λ esetén figyelmen kívül hagyhatjuk. Ezt azért minimalizáljuk, hogy a lehetõ legtovább lehessen a lényegében egyenesvonalú szakaszban gyorsulni, hisz az idõutazás döntõ többségét ebben a szakaszban érjük el. A számtani és a négyzetes közepekre vonatkozó egyenlõtlenség szerint a legjobb, ha α'=-1 gyel lassulunk, majd α'=0-val fordulunk, tehát ha itt is egyenesvonalú a pálya:

$$1 \ge \sqrt{\alpha'^2 + \phi'^2\cdot sh(\alpha)^2} \ge \frac{|\alpha'| + |\phi'|\cdot sh(\alpha)}{\sqrt{2}} \ge \frac{|\alpha'| + |\phi'|\cdot sh\left(\alpha_{min}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}\cdot\Delta\tau \ge 2\cdot\Delta\alpha + sh\left(\alpha_{min}\right)\cdot\Delta\phi \ge \left[2\cdot\left(\lambda\cdot\alpha_{max} - \alpha_{min}\right) + \Delta\phi\cdot sh\left(\alpha_{min}\right)\right]$$

Ezek közül azonos Df-hez deriválással látható, hogy a megállás esetén Dt a legkisebb.

$$\frac{d}{d\alpha_0}\left(\sqrt{2}\cdot\Delta\tau\right) = -2 + \Delta\phi\cdot\mathrm{ch}\left(\alpha_{min}\right) = 0$$

semely α_{min}-re, ha $\Delta\phi>2$

Tehát $\alpha_{min} = 0$. Ez a megoldás csak akkor lehetséges ha a fordulást megelõzõ és követõ kifelé menõ és befelé jövõ $\lambda\cdot\alpha_{max}$ sebességek párhuzamosak és az SMI-ben egybeesnek. Ha nem párhuzamosak, akkor alkalmazzuk a következõ szimmetriát. Permutáljuk úgy az idõszakaszokat, hogy a kifelé menõ $\left(\lambda\cdot\alpha_{max}..\alpha_{max}..\lambda\cdot\alpha_{max}\right)$ sebességû részek egymás mellé kerüljenek (ugyanezt a befelé jövõlre). Így pontosan két elkülönülõ gyors lényegében egyenesvonalú szakasz lesz. Ezek ha nem párhuzamosak, a kezdeti ϕ változtatásával párhuzamossá tehetõ. Ekkor nem biztos, hogy zárt SMI pályát kapunk. Azonban most a fordulószakaszt határoló $\lambda\cdot\alpha_{max}$ sebességek párhuzamosak és SMI helyük az origón átmenõ egyenesre esik. A fordulószakaszok helyett egyenesvonalú $\left|\alpha'\right| = 1$ $\alpha(\tau)$-ban maximális $\alpha(\tau)$ és $\phi(\tau)$ függvényeket használunk, akkor a fordulószakaszon növeltük a sebességet. Így végül zárt SMI-t, tehát idõutazást kaptunk, amelyre nagyobb az idõutazás.

3.7. A megoldás

Állítás: Az MI kétfogú idõutazás $t = 4\cdot\mathrm{sh}\left(\frac{T}{4}\right)$

bizonyítás: Az elõzõekben beláttuk, hogy az SMI lényegi része egyenesvonalú és a visszafordulás tartalmaz $\left|\alpha'\right| = 1$ gyorsulású megállást.

Az induló- és érkezõszakasz nem egyenesvonalú, akkor $\alpha(\tau)$ majorálható úgy, ha egyenesvonalúra cseréljük, majd a fennmaradó idõt a α_{max} sebességû helyen α_{max}-nál nagyobb sebességû mozgás beszúrására használjuk.

Végül: a gyors szakaszok egzaktul egyenesvonalúak, hisz egyébként $\left|\alpha'\right| < 1$ lenne, amire $\alpha(\tau)$ pontonként majorálható egyenesvonalú mozgással.

Általánosítások

4.1. Energiafeltétel

A bevezetõben megmutattuk, hogy a gyorsulás korlátozása mellett a másik alapvetõ feladat a maximális sebességváltozás korlátozása. A sebességváltozás a megfigyelõ energiájának változását jelenti. Ezen probléma motivációja tehát lehet a valóságos utazás megtervezése. Az utazáshoz szükséges maximális energia korlátozása újabb kényszer bevezetését jelenti, ami nyilvánvalóan megváltoztatja az optimális téridõgörbét.

Fizikai szemmel két eset lehetséges: az állandónak tekinthetõ nyugalmi tömegû ûrhajó és a csökkenõ tömegû rakéta esete. Energiakorlát nélkül az MI energiaigénye mint látni fogjuk $W = m \cdot g \cdot c \cdot T$ ahol a rakéta tömege m. Nemelhanyagolható idõutazás esetén T>>1 év ezért az energiaigény a rakéta nyugalmi tömegének többszöröse lehet. Az elsõ eset, amirõl megmutatjuk, hogy a fenti differeciálgeometriapélda esete, nem biztos hogy fizikailag releváns probléma. A rakétaelvvel csökkenõ tömegû idõutazó test matematikai értelemben kevésbé alapvetõ probléma, de a fizikai tartalma miatt mégis vizsgáljuk.

Definíció: *Korlátozott energiájú idõutazásnak* nevezzük azon idõutazásokat, mely maximum E munkával kivitelezhetõ. *Korlátozott energiájú maximális idõutazásnak* (EMI) nevezzük azokat, melyekre adott T-re t maximális.

4.1. Állandó nyugalmi tömeg, külsõ forrásból nyert energiargia

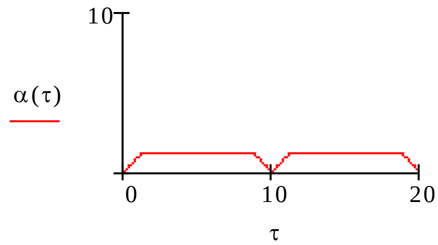
Számítsuk, ki a kibocsátott energiát! Az impulzusváltozásból

$$\left(\vec{p}\right)' = m \cdot \left(\vec{u}\right)' = \vec{a}$$

A momentán együttmozgó rendszerbõl nézve $d\tau$ idõ alatt kisugárzott impulzus tehát $\overrightarrow{dp} = -\vec{a} \cdot d\tau$. A nyugalmi tömegváltozás zérus, tehát a gyorsítás energiája $dE = \sqrt{\left(\overrightarrow{dp}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}\right)^2} \cdot d\tau$. Ezért

$$\frac{dE}{d\tau} = m \cdot |a| = m \cdot \sqrt{\alpha'^2 + \phi'^2 \cdot sh(\alpha)^2} \le m$$

Ebbõl látható, hogy $\Delta E \ge \frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \left(|\Delta\alpha| + |\Delta\phi| \cdot sh\left(\alpha_{fmin}\right)\right)$ és $a \cdot m \cdot T \le E$. Például az MI-re $E = m \cdot T$. A teljesítmény csak a gyorsuláson keresztül függ az idõtõl.



Definíció: *Egyenesvonalú csonka-kétfognak* nevezzük azokat az idõutazásokat, amelyek eltérése az egyenesvonalú kétfoghoz képest az, hogy α' nem pillanatszerûen vált elõjelet, hanem véges ideig zérus.
Állítás: Az EMI egyenesvonalú kétfog ha E<mT, egyébként csonka-kétfog, melyre

$$t \approx \left[\frac{1}{2}\cdot\left(T - \frac{E}{m}\right)\cdot\exp\left(\frac{E}{4\cdot m}\right)\right]$$

bizonyítás: Látható, hogy ha a gyorsulás 1, akkor $\Delta E = m\Delta\tau$. Ha az $E \ge m\cdot T$, akkor az EMI=MI az energiakorlát semmitmondó. Legyen E<mT. A becslések a csonka-kétfogból kiindulva érvényben maradnak. Ilymódon ismét megállapítható, hogy a gyors szakasz lényegében egyenes, és a fordulószakasz $\Delta\tau$-ban és szerencsére egyben ΔE-ben is akkor minimális ha egyenesvonalban megállunk.

$$\Delta E \ge \frac{m}{\sqrt{2}}\cdot\left(|\Delta\alpha| + \Delta\phi\cdot\mathrm{sh}\left(\alpha_{min}\right)\right)$$

Ezek után az elõzõhöz hasonlóan megmutatható, hogy a pálya közelítés nélkül egyenesvonalú. Ekkor tehát $E = m\cdot\sum|\Delta\alpha|$ van korlátozva. Ha adottak az $\alpha(\tau)$ lokális szélsõértékei, akkor látható, hogy közöttük E szempontjából érdektelen, hogy hogyan gyorsultunk. A sajátidõ-koordinátaidõ szempontjából viszont megmutattuk, hogy a pontonként maximális $\alpha(\tau)$-t kell választani. Ebbõl látható, hogy most is pontonsan két lokális maximuma van α-nak, egy a kimenõ és egy a bejövõszakaszon. Megmutatjuk, hogy ezek egyenlõek. Ha rögzítjük a térbeli legtávolabbi pontot, és a megtett úttal paraméterezzük a mozgást $d(t - T) = \mathrm{th}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot ds$. De a th konkáv függvény, $\mathrm{th}(\alpha_1) + \mathrm{th}(\alpha_2) \le 2\cdot\mathrm{th}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$ nem érdemes az útban nem egyenletesen haladni. A két maximumsebesség azonos, és maximálisan kell fékezni és gyorsulni a megálláskor, hogy α minnél kevésbé térjen el az ideálértéktõl.

4.2. Változó nyugalmi tömeg, rakétaelvû gyorsulás

A momentán együttmozgó rendszerben minden pillanatban teljesül a négyesimpulzus megmaradás. A momentán együttmozgó rendszerben $a_t = 0$ ezért

$$dp_{rakéta} = \begin{pmatrix} -dm \\ m\cdot|a|\cdot d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dE \\ dE \end{pmatrix}$$

A kisugárzott impulzust fényszerûnek tekintjük. Ezzel az m nyugalmi tömegre:

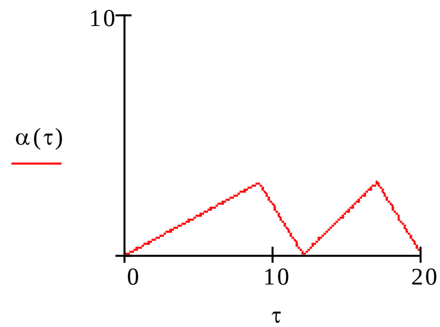
$$\frac{-1}{|a|}\cdot\frac{m'}{m} = 1$$

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} = |a|\cdot m$$

$$E(\tau) = m_0 - m$$

$$m = m_0\cdot e^{-\int |a|\,d\tau}$$

Ha a munkakorlát $E \ge m_0$ akkor az EMI=MI egyenesvonalú kétfog, hisz ekkor az energiakorlátozás semmitmondó, mindig teljesül. Rakétaelvû gyorsulásnál azonban ez lehetetlen, mert a végén m<0 lenne. Ha viszont $E < m_0$ akkor



$$\sum_i |\Delta\alpha| = \frac{m_0}{m_0 - E}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sum|\Delta\alpha| + \Delta\phi\cdot sh(\alpha_{min})\right) \le \int_0^T \sqrt{\alpha'^2 + \phi'^2\cdot sh(\alpha)^2}\,d\tau = \int_0^T |a|\,d\tau \le -\ln\left(1 - \frac{E}{m_0}\right)$$

Most sem éri meg fordulni, mert az teljesítményigényesebb, mint a lassítás. Ha E<<m_0 akkor a folyamatban $m \approx m_0$ így az elõzõekben levezetett megoldás jó közelítés, legjobb a csonka-kétfog. A következõ állításban megmutatjuk ez általában is igaz, a csonka-kétfog mellett lehet a legtöbbet idõutazni. Az energiakorlát az üzemanyag részarányára jelent alsó becslést.

<u>Állítás:</u> Rakétaelvû gyorsulás esetén is tetszõleges E-re az EMI csonka-kétfog. Ha $E \approx m_0$ és az üzemanyag részaránya $\frac{E}{m_0} = 1 - \kappa$ akkor

$$t \approx \left(\frac{4 + T + \ln(\kappa)}{2 \cdot \sqrt[4]{\kappa}} \right) \text{ if } \kappa \ge e^{-T}$$

<u>bizonyítás:</u> Azt kell csak megfigyelni, hogy az energiakényszer egyenesvonalú mozgásnál nem más mint a nyugalmi tömeg maximális változásának korlátja. Viszont az elõzõekben levezettük, hogy

$d(\ln(m)) = -|d\alpha| \le -d\tau$

Az elõzõvel (m=áll. esettel) teljesen analóg képetet kapunk ha idõtükrözzük a folyamatot. Ekkor az m_T nyug. tömegrõl nõ m_0-ig a tömeg a teljes folyamat során. Tehát most is ugyanaz a $\sum |d\alpha|$ teljes változás van korlátozva, csak a korlátot nem E/m-nek hívják.

$$\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - E}\right) = -\ln\left(1 - \frac{E}{m_0}\right) = 4 \cdot \alpha_{max}$$

$t = 4 \cdot sh(\alpha_{max}) + (T - 4 \cdot \alpha_{max}) \cdot ch(\alpha_{max})$

Nyilvánvalóan ez csak akkor érvényes, ha az energiakorlát $E \le m_0 \cdot (1 - e^{-T})$. Egyébként az EMI=MI kétfog szerint kell mozogni.

Figyeljük meg az eredményünk mennyire függ az üzemanyag részarányától! Ennek komplementerével $\kappa = 1 - \frac{E}{m_0}$ kifejezve $t \approx \left[\begin{array}{ll} \frac{4 + T + \ln(\kappa)}{2 \cdot \sqrt[4]{\kappa}} & \text{if } \kappa \ge e^{-T} \\ \left(2 \cdot \exp\left(\frac{T}{2}\right)\right) & \text{if } \kappa < e^{-T} \end{array} \right]$. Ha $\kappa \le e^{-T}$ akkor EMI=MI. ($\kappa = e^{-T}$ esetén a képletbe helyettesítve visszakapjuk a kétfog idõutazást, kisebb κ-ra a csonka kétfog eleve kétfog.)

5.1. Gravitáció

Valóságosabb problméma a gravitációt nem elhanyagolni. Tekintsük a téridõt olyan sokaságnak, mely különbözõ diszjunkt területein jó közelítéssel vagy Minkowski vagy Schwarzschild metrika. Az idõutazást hasonlóképpen definiáljuk. Az egyenletek a Schwarzschild metrikában jóval bonyolultabb alakúak. (Már a sebességet sem olyan egyszerû paraméterezni, amivel a négyessebességnégyzet automatikusan -1.) A következõket számolás nélkül észrevehetjük:

- A Schwarzschild görbület miatt egyenesvonalú mozgással lassítás nélkül teljesíthetõ a visszatéréskényszer, ha T elegendõ hogy megkerüljük!
- Sejthetõ, hogy az MI maximum 1 fekete lyukat közelít meg egyenesvonalú SMI-n.
- A téridõ ezért hengerszimmetrikus. Sejthetõ, hogy a téridõpálya tükörszimmetrikus a legtávolabbi pontig P húzott egyidejû egyenesre vonatkoztatva. Valamint P félidõben van mindkét értelemben, tehát

$$t\left(\frac{T}{2} + \tau\right) = \frac{t}{2} + t\left(\frac{T}{2} - \tau\right)$$

$$x\left(\frac{T}{2} + \tau\right) = x\left(\frac{T}{2} - \tau\right)$$

$$-y\left(\frac{T}{2}+\tau\right)=y\left(\frac{T}{2}-\tau\right)$$

$$z(\tau)=0$$

• Egy fekete lyuk eseményhorizontján az idõdilatáció ∞. Ugyan itt csak ∞ gyorsulás esetén lehet megmaradni, de azt megközelítve lehet, hogy nagyban növelni lehet az idõutazást. El lehet-e érni tetszõleges idõutazást megfelelõ nagyságú lyuk esetén? (t=∞, T=véges)
Elsõnek a geodetikus mozgást kell megvizsgálni. A Schwarzschild metrikában teljesül az idõeltolás és forgásszimmetria, ehhez tartozó Killing vektorok $\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \phi}$. Megmaradó mennyiségek tehát $u_t = E, u_\phi = L$. Ezzel a sebességkomponensek:

$$u^t=\frac{dt}{d\tau}=g^{ti}\cdot u_i=\frac{-E}{1-\frac{2\cdot M}{r}}$$

$$u^r=\frac{dr}{d\tau}=\sqrt{E^2-V^2}$$

$$u^\phi=\frac{d\phi}{d\tau}=g^{\phi i}\cdot u_i=\frac{L}{r^2}$$

ahol $V^2=\left(1-\frac{2\cdot M}{r}\right)\cdot\left(1+\frac{L^2}{r^2}\right)$ a sebességnégyzet=-1 felhasználásával jött ki.

A mozgás elkülönülõ szakaszai az távolódó és közeledõ Minkowski és a gravitációs Schwarzshild szakasz. A Minkowski szakaszokról az elõzõek felhasználásával nem nehéz látni, hogy egyenesvonalú gyorsulások. A végig Minkowski MI-hez képest eltérés, hogy a távolodó szakaszban nem kell lassulni, hisz a lyuk körüli gravitációsgörbület miatt a visszafordulás a gyorsulás nélkül az utazás idejéhez képest kis görbületi sugáron lehetséges. A gravitációs térben az instabil körpályák mentén kvázistacionárius módon korlátos térrészben tetszõleges sebességre lehet gyorsulni. Határértékben r=3M sugáron gyorsulva lehet megközelíteni a fénysebességet, ahol a külsõ álló megfigyelõ számára ismét "τ–ban exponenciális jelleggel áll meg az idõ".

Az eseményhorizontot megközelítve szintén "megáll az idõ" azonban itt a gyorsulás ∞ lenne. Ezért feltehetõ, hogy létezik egy $\delta > 0$ korlát aminél jobban a gyorsuláskorlát miatt nem lehet megközelíteni ezt a területet. Itt azonban az idõ véges korlátos mértékig "lassul le" ezért "hosszú távon" nem érdemes itt gyorsulni, hosszú utazás esetén feltehetõen az r=3M sugarú körön érdemes keringeni. Ezen a részen az üres térhez hasonlóképpen tetszõlegesen felgyorsulhatunk. Az sajátidõ a koordinátaidõhöz képest (dτ/dt) az üres térhez hasonlóan de a gravitációs idõdilatáció miatt annak $\sqrt{3}$ -ad része szerint csökken zérusra. Ezen motivációk kíséretében a következõ sejtéseket fogalmazhatjuk meg.
<u>Sejtés:</u> Kvázistacionárius közelítésben a legjobb ha $r = 3\cdot M$ sugáron gyorsulunk.
<u>Sejtés:</u> MI a legközelebbi fekete lyukat egyenesvonalú gyorsulással közelíti meg, majd akörül keringve gyorsul. A visszatérés egyenesvonalú lassulás.
Amennyiben ezen sejtések beigazolódnak. Az idõutazásra vonatkozó numerikus összefüggést

egyszerû bizonyítani.

Következmény: A sejtésben megfogalmazott MI-re az idõutazás $t \approx \left(\sqrt{3}\cdot\exp\left(\frac{T}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(t_{üres}\right)^2$

bizonyítás: A Schwarzschild metrikában adott L-hez két lehetséges geodetikus körmozgás tartozik. A külsõ stabil, a belsõ instabil. Ha feltesszük, hogy közelítõleg körmozgást végzünk, akkor az instabil körön érdemes gyorsulni érintõirányba, hisz itt eleve nagyobb dt/dτ.

$$1 = -\left(1-\frac{2\cdot M}{r}\right)\cdot\left(a^t\right)^2 + \left(1-\frac{2\cdot M}{r}\right)^{-1}\cdot\left(a^r\right)^2 + r^2\cdot\left(a^\phi\right)^2 = \frac{-E^2}{1-\frac{2\cdot M}{r}} + \frac{L^2}{r^2}$$

hisz $a^r \approx 0$

A gyorsulás során r lassan változik, felülrõl közelíti a 3M értéket. Ezért áttérhetünk az α változóra E és L helyett:

$$L = r\cdot sh(\alpha)$$

$$E = \sqrt{1-\frac{2\cdot M}{r}}\cdot ch(\alpha)$$

Ezzel a gyorsuláskényszer a szokásos $\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2 = 1$ írható. Az r=const feltételezés helyes, hisz

$$L^2 = r^2\cdot sh(\alpha)^2 = \frac{M\cdot r}{1-\frac{3\cdot M}{r}}$$

$$r = \left(3+\frac{1}{sh(\alpha)^2}\right)\cdot M$$

r hamar konvergál $3\cdot M$-hez. Ennek a felírásnak elõnye, hogy nagy r esetén -a Minkowski határesetben- α a korábban megismert α sebességparaméterbe megy át.
Ha a fekete lyuk nincs túl közel az indulóponthoz $\Delta > 10$, akkor α elég nagy lesz a közelében ahhoz, hogy ne vétsünk nagy hibát rögtön az $r \approx (3\cdot M)$ közelítéssel.

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{ch(\alpha)}{\sqrt{1-\frac{2\cdot M}{r}}}\right) \approx \left(\sqrt{3}\cdot ch(\alpha)\right)$$

$$t(T) := \sqrt{3}\cdot\exp\left(\frac{T}{2}\right)$$

Alulról becsüljük az idõutazást, ha ezen kívül Minkowski metrikát használunk. Az utazás ideje tehát 3 részbõl áll. Az egyenesvonalú megközelítés és hazatérés, valamint a gyorsuló körmozgás. A megközelítés és visszatérés koordinátaideje kb. Δ, hisz $\mathrm{ch}(\alpha) \approx \mathrm{sh}(\alpha)$. Erre τ=2ln(Δ/2), ezért

$$t = 2\cdot\Delta + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\mathrm{sh}\left(\frac{T}{2}\right) - \Delta\right) = 2\cdot\left(\sqrt{3} - 1\right)\cdot\Delta + \sqrt{3}\cdot e^{\frac{T}{2}}$$

Ha a lyukat sokáig tudjuk kerülgetni T>>2ln(Δ), azaz $\Delta << \frac{1}{2}\cdot t_{\text{üres}}$, akkor $t \approx \left(\sqrt{3}\cdot \exp\left(\frac{T}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(t_{\text{üres}}\right)^2$ Az alábbi táblázatból látható a T, az üres térbeli MI mentén a t, és a most számolt gravitációs t viszonya. Az egység mindhárom oszlopban év.

10	24.365	257.059
15	85.042	3.132E+3
20	296.826	3.815E+4
25	1.036E+3	4.648E+5
30	3.616E+3	5.662E+6
35	1.262E+4	6.898E+7
40	4.405E+4	8.403E+8
45	1.538E+5	1.024E+10
50	5.367E+5	1.247E+11

6.1. Eredmények, kilátások

A dolgozatban bebizonyítottuk, hogy korlátozott gyorsulás esetén a maximális idõutazás az egyenesvonalú térbeli görbén kétszeri gyorsulás és lassulás esetén valósítható meg. $c = 1$, $T = 1$ egységrendszerben erre a koordinátaidõ-sajátidõ viszony egzaktul megadható $t = 4\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{T}{4}\right)$.

Megmutattuk, hogy ennek energiaköltsége m tömegû állandó rakétatömeg esetén $E = m\cdot T$ Rakétaelvû gyorsulásra megfelelõen nagy $\left(\frac{E}{m_0} \ge 1 - e^{-T}\right)$ kezdeti üzenanyagarány esetén kivitelezhetõ lehet a maximális idõutazás. Megkaptuk a korlátozott energiájú esetben érvényes módosításokat is. A fizikai térben ezesetben is az egyenesvonalú pálya a maximális.

A gravitáció esetén létrejövõ görbült térben a maximális idõutazáspályát a tér görbülete eltorzítja. A sztatikus gömbszimmetrikus esetben megfogalmazott sejtések szerint a Schwarzshild lyuk távolságához képest hosszú utazásra a fényszerû körpályát megközelítve érdemes gyorsulni. Az így elérhetõ idõutazás maximum $t = \sqrt{3}\cdot\exp(T/2)$ lehet.

Más téridõk esetén nyitott a maximális idõutazás kérdése. Milyen téridõk esetén jöhet létre tetszõleges nagyságú téridõutazás véges sajátidõ alatt. Vagy létrejöhet-e a newtoni tömegpontok mechanikájából ismert szinguláris jelenséghez hasonló, melyben a pontok véges idõ alatt végtelenszer találkoznak. A relativitáselméletben a sajátidõre átfogalmazva a kérdést, fénysebességre gyorsuló vagy nagyon nagy gravitációs terek hatására elviekben nincs kizárva mindez.

Geroch 1967-ben bebizonyította, hogy elképzelhetõk olyan téridõk az általános relativitáselméletben, amiben a kronológiai sorrend és az okság megsérülhet. Kip S. Thorne a CalTechen mûködõ csoportjával az elmúlt évtizedben kapott eredményei alapján megerõsödött a gyanú, hogy amennyiben találunk vagy valamiképpen elõállítunk a téridõben olyan féreglyukakat ahol sérül a gyenge energiafeltétel, akkor az általános relativitáselmélettel összhangban elképzelhetõ a megfigyelõk olyan mozgása amelyben az idõ folyása ellentétes irányú. De, mint

Thorne írja, távolabb áll ettõl még a mai emberiség, mint az õsember az ûrutazástól. Hasonló lehet a helyzet a dolgozatban is tárgyalt idõben elõre történõ maximális idõutazással. Ezen állítások matematikai szempontból mindenesetre értékesek, a világunk geometriájának újabb alapvetõ sajátosságait tárják szemeink elé.

7. Appendix

<u>Állítás:</u> Kvázistacionárius közelítésben a legjobb ha $r = 3\cdot M$ sugáron gyorsulunk.

<u>bizonyítás:</u> Az u^t egyenletbõl látható, hogy ha nincs gyorsuláskényszer, érdemes a fekete lyuk $r = 2\cdot M$ horizontját megközelíteni. Nézzük meg, hogy milyen E és L mellett lehet még a gyorsulás maximum 1. Az r sugarú geodetikus gyorsulása: ($r' \approx 0$-val lehet számolni, hisz ezt majd a rakéta biztosítja)

$$\left(\vec{a}\right)_{geo} = \left(a^t \quad a^r \quad a^\phi\right) = \left[\frac{E'}{1 - \frac{2\cdot M}{r}} \quad \frac{\left(E^2\right)' - \left(V^2\right)'}{\sqrt{E^2 - V^2}} \quad \frac{L'}{r^2}\right]$$

Az optimális E és L értéket véve azok állandók, tehát $\left(\vec{a}\right)_{geo} = \frac{1}{\sqrt{E^2 - V^2}}\cdot\left[0 \quad -\left(V^2\right)' \quad 0\right]$. A rakéta által kifejtett gyorsulás $\vec{a}_r = \left(0 \quad a^r \quad 0\right)$ r irányú. Ennek kell kompenzálnia a sugárirányú gyorsulást, hogy $r'' = 0$ lehessen

$$0 = a^r - \left(V^2\right)' = a^r - \frac{2\cdot M}{r^2} + \frac{2\cdot L^2}{r^3}\cdot\left(1 - \frac{3\cdot M}{r}\right)$$

Viszont a geodetikus képesti gyorsulás legfeljebb 1.

$$1 \ge \left(\vec{a}_r\right)^2 = \left(1 - \frac{2\cdot M}{r}\right)^{-1}\cdot\left(a^r\right)^2 = \left(1 - \frac{2\cdot M}{r}\right)^{-1}\cdot\left[\frac{2\cdot M}{r^2} - \frac{2\cdot L^2}{r^3}\cdot\left(1 - \frac{3\cdot M}{r}\right)\right]^2$$

$$\frac{L^2}{r^3}\cdot\left(1 - \frac{3\cdot M}{r}\right) \ge \frac{M}{r^2} - \sqrt{1 - \frac{2\cdot M}{r}}$$

Mivel arra törekszünk, hogy

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2\cdot M}{r}}$$

maximális legyen. Az $u^r = r' \approx 0$ miatt azonban az E nem lehet tetszõleges:

$$E^2 - V^2 = \left[E^2 - \left(1 - \frac{2\cdot M}{r}\right)\cdot\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\right] \approx 0$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{\left(1 - \frac{2\cdot M}{r}\right)^2} = \left(1 - \frac{2\cdot M}{r}\right)^{-1}\cdot\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

Optimális esetben tehát $L \approx \infty$ vagy $r \approx (2\cdot M)$. Az utóbbit a gyorsuláskényszerre nézve kizárhatjuk. Az $L \approx \infty$ viszont $r = 3\cdot M$-nél elérhetõ, sõt ekkor $a^r = 0$ lehet

$$0 = a_r = \frac{2\cdot M}{r^2} - \frac{2\cdot L^2}{r^3}\cdot\left(1 - \frac{3\cdot M}{r}\right)$$

$$L^2 = \frac{M \cdot r}{1 - \frac{3 \cdot M}{r}}$$

Vegyük észre azonban, hogy L(0)=0 ezért L=∞ csak T=∞ alatt érhetõ el. Tehát véges T sajátidõ alatt t is véges. T=∞ idõ alatt üres térben is elérhetõ, hogy a dt/dτ derivált eltûnjön. Az a kérdés, hogy melyik esetben konvergál gyorsabban ez a mennyiség.